

ΤΑ ΖΗΝΩΝΕΙΑ ΠΑΡΑΔΟΞΑ ΚΑΙ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΝΤΙΑΝΕΣ ΑΝΤΙΝΟΜΙΕΣ

I

Ο Hegel είχε διατυπώσει την παρατήρηση, ότι οι καντιανές αντινομίες δεν σημειώνουν καμιά περαιτέρω πρόοδο σε σχέση με τις «ἀποδείξεις» του Ζήνωνος, γιατί αυτός είχε συλλάβει και συνειδητοποιήσει τους προσδιορισμούς που περιλαμβάνονται στις παρατηρήσεις μας για τον χώρο και τον χρόνο και έδειξε τις αντιφάσεις που αυτές περιέχουν.¹ Η κρίση αυτή είναι βέβαια υπερβολική. Σήμερα θα μπορούσε μόνο να υποστηριχθεί με επιτυχία ή ἄποψη ότι με αυστηρά επιστημονικά κριτήρια οι ζηνώνειες αντινομίες κατέχουν ἀπέναντι στις μαθηματικές, εἰδικά, αντινομίες του Kant μιὰ ἀνώτερη στάθμη. Πραγματικά, κατὰ γενική ἐκτίμηση, αυτές παρουσιάζουν μεγαλύτερο ἔνδιαφέρον ἀπὸ τὴν ἄποψη τῆς σύγχρονης ἐπιστήμης.² Ο Kant, ἂν καὶ ὁ ἴδιος θεωρούσε τὴν ἀντινομία ὡς μεγάλη ἐκλαμψη τοῦ πνεύματός του³, ὥστόσο δὲν προσέφερε παρὰ μιὰ «κατασκευή» με χρήση δομικῶν ὑλικῶν τὰ ὁποῖα παρείχε ἡ φιλοσοφικὴ παράδοση. Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος ἔχουν, ἀντίθετα, ἕναν πιὸ πηγαῖο χαρακτήρα, μιὰ πιὸ πρωταρχικὴ γενικότητα καὶ καθαρότερη μαθηματικὴ - λογικὴ δομὴ. Ἔτσι δὲν εἶναι παράξενο πὸς τὰ ζηνώνεια «παράδοξα»⁴ μποροῦν σήμερα νὰ ἀποτελοῦν λειτουργικὰ στοιχεῖα σὲ συστηματικὲς διαπραγματεύσεις καὶ ἐπιστημονικὲς συζητήσεις προβλημάτων πὸς ἀναφέρονται στὸν ἄνθρωπο καὶ στὸν χρόνο, στὸ ἄπειρο, στὸ συνεχὲς καὶ ἀσυνεχὲς.⁵ Ἐπιπλέον τὰ παράδοξα αὐτὰ σημειώνουν σήμερα μιὰ ἐκπληκτικὴ ἀναβίωση με τὴ μορφή ἐπινοημάτων πὸς ὀνομάζονται «ἀπειρομηχανές» καὶ ἔτσι ἐκσυγχρονισμένα θέτουν λογικὲς δυσχέρειες γιὰ τὴ σύγχρονη μαθηματικὴ φυσικὴ.

Μιὰ καὶ τὰ ζηνώνεια ἐπιχειρήματα καθὼς καὶ οἱ μαθηματικὲς ἀντινομίες τοῦ Kant θέτουν ἐπιστημολογικὰ προβλήματα πὸς παραμένουν ἀκόμα ἀνοιχτά, εἶναι ἱστορικὰ σημαντικὸ καὶ ἐπιστημονικὰ-φιλοσοφικὰ ἐπίκαιρο, νὰ δοῦμε συσχετικὰ τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος καὶ τὰ ἐπιχειρήματα τῶν δύο πρώτων ἀντινομιῶν τοῦ Kant. Βέβαια, οἱ δύο αὐτοὶ φιλόσοφοι, καθὼς μάλιστα εἶναι τόσο ἀπομακρυσμένοι χρονικὰ μεταξύ τους, σκέπτονται ὁπωσδήποτε κάτω ἀπὸ διαφορετικὲς ἱστορικὲς προϋποθέσεις. Μὲ μιὰ διαχρονικὴ, ὥστόσο, ἐξέταση τῆς προβληματικῆς τους, εἶναι δυνατό νὰ διαφανῆ ἡ σχέση τους μέσα στὰ προβλήματα καὶ στὴν κατάλληλη ἱστορικὴ προοπτικὴ τους. Τὰ κοινὰ προβλήματα πὸς ὑπόκεινται τῶν ἐπιχειρημάτων

τοῦ Ζήνωνος καὶ τῶν μαθηματικῶν ἀντινομιῶν τοῦ Kant εἶναι: ἡ φυσικὴ πραγματικότητα εἶναι ἓνα πεπερασμένο ἢ ἄπειρο σύνολο; ὑπάρχουν χωρικὰ καὶ χρονικὰ ἄτομα, ἔσχατα δηλαδὴ ἀδιαίρετα δομικὰ στοιχεῖα τῆς ἔκτασης, ἢ ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος ἀποτελοῦν συνεχῶς ἔκτατὰ μεγέθη;

Μιὰ συγκριτικὴ ἐξέταση τῆς προβληματικῆς τοῦ Kant καὶ ἐκείνης τοῦ Ζήνωνος θὰ προϋπέθετε ὅπωςδήποτε μιὰ καταφατικὴ ἀπάντηση στὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα: ὑπάρχει μιὰ ἀσφαλῆς καὶ μὲ νόημα βάση ἀναφορᾶς, κοινὴ γιὰ μιὰ παράλληλη ἐξέταση τῆς προβληματικῆς τοῦ Kant καὶ ἐκείνης τοῦ Ζήνωνος; Ἐὰν μιὰ τέτοια ἐξέταση δικαιολογῆται, ὅπως πιστεύω, μὲ βάση τὰ γεγονότα, αὐτὴ αὐτονόητα δὲν θὰ ἐξυπηρετῆ ἀπλῶς τὴν ἀνεύρεση μιᾶς ἐσωτερικῆς λογικῆς σχέσης στὴν ἱστορία τῶν ἐπιστημονικῶν καὶ φιλοσοφικῶν ἰδεῶν. Συγκριτικὲς μελέτες αὐτοῦ τοῦ εἴδους εἶναι δυνατὸ νὰ ἐμπλουτίσουν συστηματικὲς συζητήσεις ποὺ γίνονται σήμερα στὴ φιλοσοφία τῆς ἐπιστήμης γύρω ἀπὸ τὰ προβλήματα τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου, τοῦ ἀπείρου καὶ πεπερασμένου, τοῦ συνεχοῦς καὶ ἀσυνεχοῦς.

II

Στὴν *Κριτικὴ τοῦ Καθαροῦ Λόγου* κατέχει κεντρικὴ καὶ ξεχωριστὰ σημαντικὴ θέση τὸ «φαινόμενο» τῆς «ἀντιδικίας» μεταξὺ γενικῶν μεταφυσικῶν («κοσμολογικῶν») προτάσεων, οἱ ὁποῖες, ἂν καὶ ἀντιμαχόμενες, προβάλλονται ἐξίσου ἔγκυρες καὶ λογικὰ ἀναγκαῖες, ὥστε ὁ λόγος νὰ βρίσκη τὸν ἑαυτό του σὲ διχόνοια πρὸς αὐτὸν τὸν ἴδιο. Πρόκειται γιὰ τὶς τέσσερις ἀντινομίες τοῦ Kant, ἀπὸ τὶς ὁποῖες οἱ δύο πρῶτες (οἱ λεγόμενες «μαθηματικές»), ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρουν ἐδῶ, μποροῦν νὰ παρασταθοῦν ὡς ἐξῆς:⁶

Πρώτη Ἀντινομία

θέση: ὁ κόσμος ἔχει μιὰ ἀρχὴ
στὸ χρόνο καὶ εἶναι χωρικὰ
ἐπίσης περιορισμένος.

ἀντίθεση: ὁ κόσμος δὲν ἔχει ἀρχὴ
στὸ χρόνο καὶ ὄρια στὸ χῶρο,
ἀλλ' εἶναι τόσο χρονικὰ ὅσο καὶ
χωρικὰ ἄπειρος.

Ἡ *θέση* ὅτι ὁ κόσμος εἶναι χρονικὰ καὶ χωρικὰ πεπερασμένος ἀποδεικνύεται ἔμμεσα, μὲ τὴν κατ' ἀρχὰς λήψη τοῦ ἀντιθέτου: ἔστω ὅτι ὁ κόσμος δὲν ἔχει καμιὰ χρονικὴ ἀρχὴ καὶ εἶναι χωρικὰ ἄπειρος. Ὡς πρὸς τὸν χρόνο, ἡ ὑπόθεση αὐτὴ συνεπάγεται τὴν ἀποδοχὴ μιᾶς ἄπειρης σειρᾶς διαδοχικῶν καταστάσεων τοῦ κόσμου καὶ μαζὶ διαδοχικῶν χρονικῶν διαστημάτων ποὺ ἔχουν περάσει ὡς τώρα· μιὰ ἄπειρη ὁμως σειρὰ διαστημάτων χρόνου δὲν μπορεῖ νὰ ἔχη παρέλθει, μιὰ καὶ εἶναι ἀδύνατο αὐτὴ νὰ συμπληρωθῇ μὲ διαδοχικὴ σύνθεση, καὶ ἐπομένως δὲν μπορεῖ νὰ ἔχη ὑπάρξει· ἄρα ὁ

κόσμος δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι χρονικὰ ἄπειρος. Ὡς πρὸς τὸν χῶρο, ἐξάλλου, ἡ ὑπόθεση τῆς ἀπειρότητας τοῦ κόσμου συνεπάγεται τὴν ἀποδοχὴ ἑνὸς κόσμου ὡς ἄπειρου δεδομένου ὄλου ἀπὸ συνυπάρχοντα μέρη, ὡς ἄπειρου ἀθροίσματος ὄλων τῶν ἐκτατῶν ἐν χῶρῳ πραγμάτων· εἶναι ὁμοῦς ἀδύνατο νὰ νοηθῆ συμπληρωμένη ἢ σύνθεση τῶν μερῶν ἑνὸς τέτοιου ὄλου· ἐπομένως ὁ κόσμος ὡς δεδομένο ὄλο δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι χωρικὰ ἄπειρος. Ἄρα, ὁ κόσμος εἶναι καὶ χρονικὰ καὶ χωρικὰ πεπερασμένος.

Ἡ ἀντίθεση ἀποδεικνύεται ἐπίσης ἔμμεσα, μὲ λήψη τοῦ ἀντιθέτου: ἔστω ὅτι ὁ κόσμος εἶναι χρονικὰ καὶ χωρικὰ πεπερασμένος. Ὡς πρὸς τὸν χρόνο, ἡ ὑπόθεση αὐτὴ συνεπάγεται τὴ θέση ὅτι ὁ χρόνος ἑναρξῆς τοῦ κόσμου ἔχει προηγούμενο ἕναν κενὸ χρόνο, κατὰ τὸν ὁποῖο δὲν ὑπῆρχε τίποτε· ἀλλὰ μέσα σ' ἕναν κενὸ χρόνο δὲν εἶναι δυνατὴ ἡ γένεση κανενὸς πράγματος· ἄρα ὁ κόσμος δὲν μπορεῖ νὰ ἄρχισε μιὰ φορὰ καὶ γι' αὐτὸ εἶναι ὡς πρὸς τὸν παρελθόντα χρόνο ἄπειρος. Ἀπὸ τὴν ἀποψη τοῦ χῶρου πάλι, ἡ ὑπόθεση ὅτι ὁ κόσμος εἶναι πεπερασμένος συνεπάγεται τὴν ἀποψη ὅτι αὐτὸς ἀποτελεῖ μιὰ περιορισμένη «νησίδα» μέσα σ' ἕναν κενὸν ἀπεριόριστο χῶρο· ἔξω ὁμοῦς ἀπὸ τὸν κόσμο δὲν συναντᾶται κανένα ἀντικείμενο τῆς ἐποπτείας καὶ ἐπομένως κανένα *correlatum* τοῦ κόσμου· ἔτσι ἡ σχέση τοῦ κόσμου πρὸς τὸν κενὸ χῶρο θὰ ἦταν σχέση μὲ τὸ τίποτε, δηλαδὴ δὲν θὰ ἦταν καθόλου σχέση· ἄρα ὁ κόσμος δὲν μπορεῖ νὰ ἔχη χωρικὰ ὄρια καὶ εἶναι γι' αὐτὸ ἄπειρος. Ὁ κόσμος, λοιπόν, εἶναι καὶ χρονικὰ καὶ χωρικὰ ἄπειρος.

Δεύτερη Ἀντινομία

θέση: κάθε σύνθετη οὐσία μέσα στὸν κόσμο συνίσταται ἀπὸ ἀπλὰ μέρη καὶ δὲν ὑπάρχει πουθενὰ τίποτε ἄλλο παρὰ τὸ ἀπλό ἢ αὐτὸ ποὺ συντίθεται ἀπὸ τὸ ἀπλό.

ἀντίθεση: κανένα σύνθετο πράγμα μέσα στὸν κόσμο δὲν συνίσταται ἀπὸ ἀπλὰ μέρη καὶ τίποτε τὸ ἀπλό δὲν ὑπάρχει πουθενὰ μέσα στὸν κόσμο.

Ἡ θέση ἀποδεικνύεται κι' ἐδῶ ἔμμεσα, μὲ τὴν ἀρχικὴ ἀποδοχὴ τοῦ ἀντιθέτου: οἱ σύνθετες οὐσίες δὲν ἀνάγονται σὲ ἀπλὰ συστατικὰ μέρη. Ἐὰν ὁμοῦς αἴρεται κάθε σύνθεση, δὲν θὰ πρέπη νὰ ὑπάρχη τίποτε σύνθετο καὶ μαζί τίποτε ἀπλό, ἄρα καμιὰ οὐσία δὲν θὰ εἶναι δεδομένη. Ἡ λοιπόν εἶναι ἀδύνατη ἡ ἄρση κάθε σύνθεσης *in mente*, ἢ μετὰ τὴν ἄρση αὐτὴ πρέπει νὰ ἀπομένῃ κάτι ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι συστατικὸ κανενὸς σύνθετου, δηλαδὴ τὸ ἀπλό. Χωρὶς τὴ σύνθεση, οἱ οὐσίες πρέπει νὰ ὑπάρχουν ὡς ἔμμονες γιὰ τὸν ἑαυτὸ τους, ἀνεξάρτητα δηλαδὴ ἀπὸ τὴν σύνθεση, ἀλλ' αὐτὸ ἀντιφάσκει πρὸς τὴν προϋπόθεση· ἄρα ἰσχύει ἡ δεύτερη ἐναλλακτικὴ περίπτωση: οἱ σύνθετες οὐσίες μέσα στὸν κόσμο συνίστανται ἀπὸ ἀπλὰ μέρη, νοητὰ μὲ ἀπόλυτη προτεραιότητα ἀπέναντι σὲ κάθε σύνθετο.

Ἡ ἀντίθεση ἀποδεικνύεται ἐπίσης μὲ λήψη τοῦ ἀντιθέτου: ἔστω πὼς τὸ σύνθετο συνίσταται ἀπὸ ἀπλὰ μέρη. Ἄλλὰ κάθε σύνθεση οὐσιῶν εἶναι δυνατὴ μόνον ἐν χώρῳ καὶ τὰ ἀπλὰ μέρη κάθε σύνθετου εἶναι τόσα ὅσα καὶ τὰ ἀντίστοιχα μέρη τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα εἶναι χώροι· κάθε ἀπλό, λοιπόν, μέρος τοῦ σύνθετου καταλαμβάνει ἓνα χῶρο· ἐπομένως εἶναι πραγματικὰ τόσο τὸ ἀπλό ὅσο καὶ τὸ σύνθετο (αὐτὸ δηλαδή δὲν εἶναι ἓνα σύνθετο ἀπὸ συμβεβηκότα). Κάθε πραγματικό, ὡστόσο, περιλαμβάνει ποικίλα στοιχεῖα τὸ ἓνα ἔξω ἀπὸ τὸ ἄλλο καὶ εἶναι ἓνα πραγματικὸ σύνθετο ἀπὸ οὐσίες· ἄρα θὰ ἔπρεπε τὸ ἀπλό νὰ εἶναι ἓνα οὐσιαστικὸ σύνθετο, πράγμα ἀντιφατικό. Κανένα, λοιπόν, σύνθετο πράγμα δὲν μπορεῖ νὰ συνίσταται ἀπὸ ἀπλὰ μέρη. Τὸ ἀπλό ἄλλωστε δὲν μπορεῖ νὰ βρεθῆ σὲ καμιὰ ἐμπειρία καὶ ἀποτελεῖ μιὰ «ἀπλή ἰδέα». Ἄρα τίποτε τὸ ἀπλό δὲν εἶναι δεδομένο στὸν κόσμο.

Ὁ Kant ἰσχυρίζεται ὅτι ἡ μόνη ἐνδεδειγμένη τακτικὴ νὰ ξεκαθαρίσουμε μιὰ ἀστάθμητη κατάσταση ποὺ παρουσιάζεται ὅταν ἔχουμε μπροστὰ μας προτάσεις σὰν αὐτὲς ποὺ ἀμιλλῶνται μεταξύ τους, εἶναι νὰ προκαλέσουμε τὴ διαμάχη ἀνάμεσά τους.⁷ Τὴ μέθοδο αὐτὴ ὁ Kant τὴν ὀνομάζει «σκεπτικὴ μέθοδος» καὶ ἐπίσης «διαλεκτικὴ μέθοδος» καὶ μὲ αὐτὸ τὸ νόημα ἀναγνωρίζει τὸν Ζήνωνα ὡς πρόδρομο τῆς δικῆς του διαλεκτικῆς.⁸ Αὐτὸς ὁμολογεῖ πὼς στὸν Ζήνωνα ἀνήκει ἡ ἐξαιρετικὴ τιμὴ ὅτι ἐφήρμοσε τὴ γόνιμη σκεπτικὴ μέθοδο ποὺ ἀφορᾷ τὴ χρῆση τοῦ καθαροῦ λόγου.^{8α} Καὶ εἶναι εἰδικὰ ἀξιοσημείωτο πὼς ὁ Kant στὸ κύριο κριτικὸ του ἔργο, καὶ μάλιστα στὸ πιὸ κεντρικὸ καὶ σημαντικὸ τμῆμα του, ἀναφέρεται στὸν Ζήνωνα μὲ θαυμασμὸ («ὁ Ἐλεάτης Ζήνων, ἓνας ἐξοχος διαλεκτικός. . .»⁹), ἐνῶ εἶναι παρατηρημένο πὼς αὐτὸς σπάνια ἀναφέρεται σὲ ἀρχαίους στοχαστὲς στὰ κριτικά του ἔργα. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ Kant διέκρινε τὴν ξεχωριστὴ ἀξία τῆς ζηνώνειας μεθόδου καὶ τὴν θεώρησε ὡς προανάκρουσμα τῆς δικῆς του.

Ἡ ἀναφορὰ τοῦ Kant στὸν Ζήνωνα θὰ φαινόταν ἐκ πρώτης ὄψεως ὅτι περιέχει μερικὲς πολὺ παράξενες ἀπόψεις (ὅτι λ.χ. ὁ Ζήνων «ἀποφαινόταν πὼς ὁ θεὸς — πιθανὸν αὐτὸς νὰ μὴν ἦταν στὸν Ζήνωνα παρὰ ὁ κόσμος — δὲν εἶναι οὔτε πεπερασμένος οὔτε ἄπειρος, δὲν βρίσκεται οὔτε σὲ κίνηση οὔτε σὲ ἡρεμία, δὲν εἶναι μὲ κανένα ἄλλο πράγμα οὔτε ὁμοιος οὔτε ἀνόμοιος»), ἂν δὲν λαμβάναμε ὑπόψη τὸ ἀκόλουθο ἱστορικὸ γεγονὸς ποὺ μοιραῖα ἐνέπλεξε καὶ τὸν Kant: αὐτὸς χρησιμοποίησε τὸ ψευδοαριστοτελικὸ ἔργο *Περὶ Μελλίσσου, Ξενοφάνους, Γοργίου*, τὸ ὁποῖο στὰ χρόνια του ἔφερε ἀκόμα τὸν τίτλο *De Xenophane Zenone Gorgia*. Ἔτσι ἡ διδασκαλία τοῦ Ξενοφάνη ἐκλαμβανόταν λανθασμένα ὡς διδασκαλία τοῦ Ζήνωνος.¹⁰ Πέρα ἀπὸ τὶς ἐμπλοκὲς ποὺ ἐξηγοῦνται μὲ τὸ γεγονὸς αὐτό, ὁ Kant ἐπιτυγχάνει μιὰ ὀρθὴ γενικὰ ἐκτίμηση τῆς μεθόδου τοῦ Ζήνωνος. Ἀναφερόμενος στὶς ἐπικρίσεις ἐκείνων (τοῦ Πλάτωνος λ.χ.) ποὺ δὲν μποροῦσαν νὰ ἀνεχθοῦν τὴ ζηνώνεια τακτικὴ τῆς ἄρνησης δύο προτάσεων ἐντελῶς ἀντιφατικῶν μεταξύ τους, παρατηρεῖ: «μόνο ποὺ δὲν βρίσκω ὅτι θὰ μποροῦσε αὐτὸ νὰ

ἐπιρρίπτεται δίκαια εἰς βάρος του». Μὲ τοὺς λόγους τοῦ ἴδιου τοῦ φιλοσόφου¹¹, ἐὰν ἀρνήται κανεὶς λ.χ. ἕναν ἄπειρο κόσμο, δὲν σημαίνει διὰ τί θέτει ἕναν ἄλλο, τὸν πεπερασμένο κόσμο· μὲ ἄλλα λόγια, οἱ παραλλαγές «ὁ κόσμος εἶναι ἄπειρος» καὶ «ὁ κόσμος εἶναι πεπερασμένος» θὰ μπορούσαν νὰ εἶναι καὶ οἱ δύο ψευδεῖς, γιὰ τί προϋποθέτουν τὸν ἴδιο τὸν κόσμο (τὴν ὅλη σειρά τῶν φαινομένων) ὡς ἕνα «πράγμα καθαυτό». Ἔτσι ἐξηγεῖται πολὺ καλὰ ἡ ὑποστήριξη, ποὺ κάνει ὁ Kant, τῆς ζηνώνειας μεθόδου: «ἂν τὸ σύμπαν περιλαμβάνη μέσα του ὅλα ὅσα ὑπάρχουν, . . . δὲν ὑπάρχει ἔξω ἀπ' αὐτὸ κανένα ἄλλο πράγμα μὲ τὸ ὁποῖο αὐτὸ θὰ ἦταν δυνατὸ νὰ συγκρίνεται. Ὅταν δύο ἀντιτιθέμενες μεταξύ τους κρίσεις προϋποθέτουν ἕναν ὄρο ἀπαράδεκτο, καταπίπτουν καὶ οἱ δύο παρὰ τὴ διαφωνία τους (ἢ ὁποῖα ὅμως δὲν εἶναι καθατὸ ἀντίφαση), ἐπειδὴ καταπίπτει ὁ ὄρος ὑπὸ τὸν ὁποῖο μόνον θὰ ἔπρεπε νὰ ἰσχύη καθεμιὰ ἀπὸ τις δύο προτάσεις». Ἰδιαίτερα ἀξιοσημειωτὴ εἶναι ἡ παρατήρηση τοῦ Kant ὅτι ἐὰν τὸ σύμπαν εἶναι ὅλα ὅσα ὑπάρχουν, κανένα συσχετικὸ τοῦ πράγμα δὲν μπορεῖ νὰ βρεθῆ ἔξω ἀπ' αὐτὸ τὸ σύνολο: «διότι ὅλοι οἱ τόποι εἶναι μέσα στὸ σύμπαν, αὐτὸ τὸ ἴδιο λοιπὸν δὲν εἶναι σὲ κανένα τόπο.» Ἡ παρατήρηση αὐτὴ ἀφορᾷ στὸ ἀδιέξοδο ποὺ ἐπισήμανε ὁ Ζήνων ὡς πρὸς τὴν ὑπόθεση τοῦ ἀπόλυτου χώρου σ' ἕνα ἐπιχείρημα¹², τὸ ὁποῖο παρουσιάζεται ἔξω ἀπὸ τὰ πλαίσια τῶν ὀνομαστῶν ἐπιχειρημάτων του:

- (i) ὅλα ὅσα ὑπάρχουν βρίσκονται ἐν χώρῳ
- (ii) ὁ χώρος ὑπάρχει, ἄρα — δεδομένων τῶν (i) καὶ (ii) —
- (iii) ὁ χώρος βρίσκεται ἐν χώρῳ κι' ἔτσι ἐπ' ἄπειρον¹³.

Ἄλλὰ ὁ Kant δὲν ἀναφέρεται ρητὰ στὰ «παράδοξα» τοῦ Ζήνωνος καὶ δὲν ἐπισημαίνει, ὅπως θὰ περίμενε κανεὶς, τὴν ἀντινομικὴ τους δομὴ· διότι αὐτὴ ἀπηχεῖται κατὰ τὸν πιὸ χαρακτηριστικὸ τρόπο στὴ δομὴ τῶν δικῶν του ἀντινομῶν.¹⁴

Ὡστόσο, ὁ Kant, ἂν καὶ δὲν κάνει συγκεκριμένα λόγο γιὰ τὰ ὀνομαστὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος¹⁵, μᾶς παραπέμπει, ὅπως δείχνει τουλάχιστο τὸ κείμενο ποὺ σχολιάσαμε, στὴν μοναδικῆς σημασίας προσφορὰ τοῦ Ζήνωνος ὡς τὸ πιὸ χαρακτηριστικὸ ἱστορικὸ προηγούμενο ποὺ προαναγγέλλει τὴ δική του «Ἀντιθετικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου».

Αὐτό, ὡστόσο, δὲν ἀρκεῖ. Εἶναι γεγονὸς ὅτι ὁ P. Bayle μὲ τὸ περίφημο ἄρθρο του γιὰ τὸν Ζήωνα τὸν Ἐλεάτη στὸ Dictionnaire του¹⁶ ξεσήκωσε μεγάλο σάλο ἀνάμεσα στοὺς φιλοσοφικοὺς καὶ ἐπιστημονικοὺς κύκλους τῆς ἐποχῆς καὶ προκάλεσε ζωνρὲς καὶ βίαιες συζητήσεις, εἰδικὰ γύρω ἀπὸ τὸ πρόβλημα ἐὰν ἡ ὕλη εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετὴ ἢ συνίσταται ἀπὸ ἀπλά καὶ ἀδιαίρετα στοιχεῖα. Ἀπὸ τὸν Bayle (δηλαδὴ τὴ ζηνώνεια προβληματικὴ ποὺ αὐτὸς ἔκανε νὰ ἀναβιώσῃ) ἐμπνεύστηκε ἄμεσα ὁ A. Collier στὸ ἔργο

του *Clavis Universalis*¹⁷, τὸ ὁποῖο τὸ 1756 μεταφράστηκε ἀπὸ τὸν Eschenbach στὰ γερμανικά (ἂν καὶ ὁ Kant μποροῦσε μᾶλλον νὰ διαβάζη ἀγγλικά κείμενα). Ὁ Collier ἐξέθετε σθεναρὰ τὶς ἄλυτες ἀντιφάσεις ποὺ εἶναι σύμφυτες μὲ τὴν ἰδέα τοῦ συνεχοῦς καὶ ἀνέπτυσσε μιὰ βίαιη ἐπίθεση κατὰ τῆς ὑπόθεσης τοῦ ἀπόλυτου χώρου. Ἀλλὰ τὴν ἐπίδραση τῆς πραγματείας τοῦ Collier πάνω στὴ διαμόρφωση τῶν μαθηματικῶν ἀντινομιῶν τοῦ Kant δὲν πρέπει νὰ τὴν ὑπερτονίζουμε, ἂν βέβαια προϋποθέτουμε ὅτι ὁ Kant εἶχε διαβάσει αὐτὸ τὸ βιβλίο καὶ εἶχε δεχτῆ δάνεια ἀπ' αὐτό. Εἶναι μᾶλλον τὸ γενικὸ κλίμα τῆς ἐποχῆς ποὺ χαρακτηρίζεται ἀπὸ ὀξείες συζητήσεις πάνω στὰ προβλήματα τῆς δομῆς τῆς ὕλης, τοῦ χώρου καὶ τοῦ ἄπειρου.¹⁸ Ὅπως κι' ἂν εἶναι, εἴτε δηλαδὴ ὁ Kant δέχτηκε ὀρισμένα τὴν ἐπίδραση τοῦ *Clavis Universalis* τοῦ Collier εἴτε τὴν ἐπίδραση τοῦ γενικοῦ κλίματος τῆς ἐποχῆς μὲ τὶς ζωηρὲς συζητήσεις πάνω σὲ προβλήματα σὰν αὐτὰ ποὺ ὁ ἴδιος ἐπεξεργάστηκε στὶς μαθηματικὲς ἀντινομίες του (καὶ εἴτε φυσικὰ δεχόμεστε καὶ τὰ δύο μὲ ἰδιαίτερη, ἔστω, ἔμφαση στὴν ἐπίδραση τοῦ Collier), τὸ πιὸ σημαντικό εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ὅλη αὐτὴ ἡ κίνηση ποὺ κορυφώνεται στὶς καντιανὲς μαθηματικὲς ἀντινομίες ὀφείλεται σὲ μεγάλο βαθμὸ στὴ ζηνώνεια προβληματικὴ τὴν ὁποία ἀνέστησε ὁ Bayle μὲ τὸ ἄρθρο του «*Zénon d'Elée*».

Μιὰ ἀνάλυση, λοιπόν, τῶν ἐπιχειρημάτων τοῦ Ζήνωνος θὰ ἦταν δυνατὸ νὰ ὀδηγήσει σὲ συγκεκριμένους παρατηρήσεις ποὺ θὰ δείχνουν ἂν καὶ κατὰ πόσον ὁ Kant μπορεῖ νὰ βρεθῆ ὅτι δημιουργεῖ ὑπὸ τὴν ἱστορικὴ σκιά τῆς ζηνώνειας μεθόδου καὶ προβληματικῆς.

III

Τὰ δύο «παράδοξα» τοῦ Ζήνωνος ποὺ ἀφοροῦν τὴν πολλαπλότητα ἔχουν μεγάλη σημασία γιὰ τὸ πρόβλημα τῆς δυναμικῆς ἀπειρότητας καὶ ἀριθμητικῆς πυκνότητας μιᾶς πλουραλιστικῆς πραγματικότητας.

Τὸ πρῶτο ἐπιχείρημα^{18α} μπορεῖ νὰ διατυπωθῆ ὡς ἑξῆς:

- (i) ἡ πραγματικότητα εἶναι πολλαπλή
- (ii) τὸ πολλαπλὸ συνίσταται ἀπὸ μέρη
- (iii) τὰ μέρη εἶναι διαιρετὰ
- (iv) ἡ διαιρετότητα ὀδηγεῖ στὸ ἄπειρο, ὅπου τὰ ἑκτατὰ μεγέθη γίνονται ἄπειρα καὶ καταντοῦν σὲ μὴ ἑκτατὰ σημεῖα, τὰ ἄπειρα μικρὰ
- (v) ἀλλὰ καὶ τὸ ἄπειρα μεγάλο εἶναι δυνατό, αὐτὸ δηλαδὴ ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ σύνθεση τῶν ἀπειράριθμων θετικῶν μεγεθῶν.

Ὅπως εἶναι φανερό, τὸ ἐπιχείρημα αὐτὸ ἐπισημαίνει τὴν δυναμικὴ ἀπειρό-

τητα τόσο τοῦ ἐσωτερικοῦ ὅσο καὶ τοῦ ἐξωτερικοῦ ὀρίζοντα τῆς πραγματικότητας. Ἀπὸ τὸ (iv) προκύπτει ὅτι εἴτε ἡ πραγματικότητα εἶναι πεπερασμένα εἴτε ἄπειρα μεγάλη, ἐὰν τὰ συστατικά της εἶναι μὴ ἐκτατὰ μεγέθη, τὸ ἄθροισμα θὰ εἶναι ἀναγκαστικὰ μηδέν. Ἀπὸ τὸ (v) ὅμως προκύπτει ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀπειράριθμων μεγεθῶν θετικῆς ἀξίας πρέπει νὰ εἶναι ἄπειρο.

Τὸ δεύτερο ἐπιχείρημα¹⁹ ἀναφέρεται στὴν ἀριθμητικὴ πυκνότητα τῆς πολλαπλῆς πραγματικότητας:

- (i) ἡ πραγματικότητα εἶναι πολλαπλή
- (ii) τὸ πολλαπλὸ συνίσταται ἀπὸ ἐπιμέρους πράγματα
- (iii) ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπιμέρους πραγμάτων εἶναι πεπερασμένος, γιατί εἶναι ἀνάγκη νὰ ὑπάρχουν τόσα πράγματα ὅσα ὑπάρχουν πραγματικά, οὔτε περισσότερα οὔτε λιγότερα ἀπὸ τὰ ὑπάρχοντα
- (iv) στὴν πεπερασμένη ὅμως αὐτὴ σειρά τῶν πραγμάτων, ἀνάμεσα σὲ ὁποιαδήποτε δύο δεδομένα πράγματα d_1 καὶ d_2 ὑπάρχει πάντοτε ἓνα τρίτο ἐνδιάμεσο d_3 , ἀνάμεσα στὸ d_1 καὶ στὸ d_3 ἓνα ἄλλο ἐνδιάμεσο d_4 κ.ο.κ. ὡς τὸ ἄπειρο.²⁰

Ἐάν, λοιπόν, ἡ δεδομένη πραγματικότητα συνίσταται ἀπὸ πραγματικὰ μέρη, αὐτὰ εἶναι πεπερασμένου ἀριθμοῦ· ἐὰν αὐτὴ συνίσταται ἀπὸ μὴ ἐκτατὰ σημεία, τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἀπὸ τὴν συνεχή ἐνδιαμεσότητα, αὐτὰ εἶναι ἀπειράριθμα. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα ἑνὸς πλήθους (πεπερασμένου ἢ ἀπειρου) μεγεθῶν τὰ ὁποῖα δὲν ἔχουν ἔκταση εἶναι μηδέν.

Τὰ παράδοξα ποὺ ἀναφέρονται στὴν κίνηση καὶ στὰ ὁποῖα ὁ Ζήνων ὀφείλει πρὸς πολὺ τὴ φήμη του εἶναι ἰδιαίτερα σημαντικὰ γιὰ τὸν κύκλο τῶν προβλημάτων ποὺ περιέχονται στὶς μαθηματικὲς ἀντινομίες τοῦ Kant. Εἶναι τὰ ὀνομαστὰ παράδοξα τῆς Διχοτομίας, τοῦ Ἀχιλλέως καὶ τῆς Χελώνας, τοῦ Βέλους καὶ τοῦ Σταδίου.

Τὸ Παράδοξο τῆς Διχοτομίας²¹

Ἄς φανταστοῦμε ἓναν δρομέα ποὺ πρέπει νὰ διατρέξῃ μιὰ δεδομένη ἀπόσταση a . Ἐὰν αὐτὸς τρέχῃ μὲ μιὰ σταθερὴ ταχύτητα v καὶ τοῦ χρειάζεται, προκειμένου νὰ πραγματοποιήσῃ αὐτὴ τὴ διαδρομὴ, ἓνας ὀρισμένος χρόνος t , πρέπει νὰ καλύψῃ πρῶτα τὸ μισὸ τῆς χωρικῆς ἔκτασης ($a/2$) στὸν μισὸ χρόνο ($t/2$) καὶ πρὶν περάσῃ τὸ μισὸ πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ ἓνα τέταρτο τοῦ ὅλου διαστήματος ($a/4$) στὸ τέταρτο τοῦ ὅλου χρόνου ($t/4$) κι' ἔτσι ἐπ' ἄπειρον. Μὲ μιὰ πρὸ γενικὴ διατύπωση²², πρὶν ὁ δρομέας διανύσῃ ἓνα χωρικὸ διάστημα μήκους $\frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), πρέπει νὰ ἔχῃ διανύσει τὸ μισὸ ἀπ' αὐτό, δηλαδή τὸ ὑποδιάστημα μήκους $1/2^{n+1}$. Ἐτσι σὲ κανονικὴ χρονικὴ ἀκο-

λουθία ὁ δρομέας πρέπει νὰ διανύσῃ μιὰ ἄπειρης σύνθεσης ἀναδρομικὴ πορεία ἀπὸ ὑποδιαστήματα πού τὰ μήκη τους εἶναι

$$\dots, 1/2^n, \dots, 1/2^3, 1/2^2, 1/2$$

Ἐπιπλέον, ὅτι δὲν ὑπάρχει πρῶτος ὅρος σὲ αὐτὴ τὴ σειρά τῶν ὑποδιαστημάτων, σημαίνει πὼς ἡ ἀναδρομικὴ πορεία εἶναι ἄπειρη. Καὶ ἐπειδὴ στὴν ἄπειρη παλινδρομικὴ πορεία δὲν ὑπάρχει πρῶτος ὅρος πού θὰ ἀντιπροσωπεύῃ αὐτὸ πού πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ κινούμενο σῶμα στὴν «ἀρχή» τῆς κίνησής του, δὲν εἶναι νοητικὰ δεκτὸ πὼς μιὰ ὁποιαδήποτε φυσικὴ κίνηση ἄρχισε μιὰ φορά. Ἐτσι εἶναι ἀδύνατο νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἀρχὴ ὁποιασδήποτε φυσικῆς κίνησης, μιὰ καὶ ἓνα κινούμενο σῶμα εἶναι ἀνάγκη, προτοῦ περάσῃ ὁποιοδήποτε σημεῖο τῆς δεδομένης ἀπόστασης, νὰ διανύσῃ μιὰ ἄπειρη σειρά σημείων ὅλο καὶ πιὸ κοντὰ στὴν ἀφετηρία. Διότι προϋποτίθεται ὅτι ἡ ἔκτασις εἶναι συνεχοῦς δομῆς καὶ τὸ συνεχὲς μιᾶς ἔκτασις σημαίνει ὅτι μεταξὺ δύο ὁποιοῦνδήποτε σημείων τῆς μπορεῖ νὰ ὀρισθῇ ἓνα τρίτο ἐνδιάμεσο. Ἐὰν ὅμως ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἔκτατὰ μεγέθη ἐπ' ἄπειρον διαιρετά, ἔχουν δηλαδὴ μιὰ συνεχῆ δομὴ, ἡ ἄπειρη σύνθεσή τους εἶναι αὐτοαντιφατικὴ: ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος ὡς ἔκτατὰ μεγέθη εἶναι ἀδύνατο νὰ ἀναλύωνται σὲ — καὶ νὰ συντίθενται ἀπὸ — ὑποδιαστήματα μὴ ἔκτατά. Μιὰ ἔκτασις ἄπειρης σύνθεσης ἔχει αὐτονόητα ἄπειρη πυκνότητα καὶ μὲ τὴ μέθοδο τῆς συνεχοῦς διαίρεσης «ἐκφυλίζεται» σὲ σημεῖα μὴ ἔκτατά. Αὐτὸ ὅμως εἶναι ἀντιφατικόν: κανένα σύνολο τοῦ τίποτε δὲν ἴσούται μὲ κάτι. Ἡ πορεία αὐτὴ διαίρεσης καὶ σύνθεσης τῶν μερῶν τῆς ἔκτασις ὀδηγεῖ βέβαια στὸ ἄπειρο, ἀλλὰ φυσικὰ ἡ κίνηση εἶναι δυνατὴ. Ἐκεῖνο πού ἔχει σημασία ἐδῶ δὲν εἶναι πὼς ἀποδεικνύεται τὸ ἀδύνατο τῆς κίνησης στὴν πραγματικότητα παρὰ ὅτι ἡ κίνηση λαμβάνει χώραν σὲ μιὰ ἔκτασις πεπερασμένη ὡς πρὸς τὸν ἔξωτερικό της ὀρίζοντα καὶ ἄπειρη ὡς πρὸς τὸν ἐσωτερικό της ὀρίζοντα.²³ Ἐτσι ἡ κίνηση συνεπάγεται λογικὲς δυσχέρειες πού τὴν κάνουν, βέβαια, προβληματικὴ *in mente* καὶ ὄχι στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα.

Ἡ χωροχρονικὴ, λοιπόν, ἔκτασις εἶναι πεπερασμένη καὶ ἄπειρη: ἓνα πεπερασμένο χωρικό ἢ χρονικὸ διάστημα εἶναι ὡς πρὸς τὴ σύνθεσή του ἄπειρο, δηλαδὴ συνεχές, σὲ σχέσιν μὲ μιὰ κίνηση πού ἀνάγεται σὲ γεωμετρικὴ σειρά ἄπειρων χωροχρονικῶν ὑποδιαστημάτων:

$$1/2, 1/2^2, 1/2^3, 1/2^4, \dots, 1/2^n, \dots (n = 1, 2, 3, \dots)$$

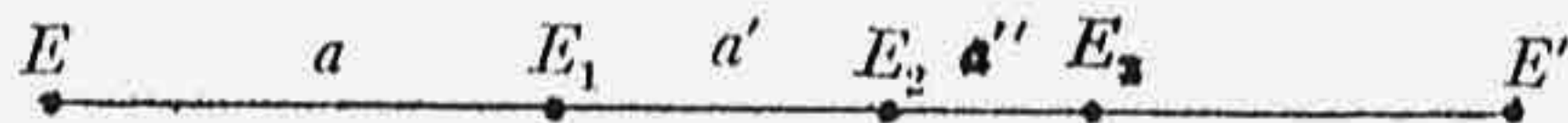
Ἡ ὑπαρξὴ τῶν ὑποδιαστημάτων αὐτῶν εἶναι ἡ ὑπαρξὴ ἑνὸς πραγματικοῦ ἄπειρου χωροχρονικῶν σημείων²⁴ καὶ μπορεῖ νὰ παρασταθῇ μὲ μιὰ σειρά χωρὶς τελευταῖο μέλος ἢ (ἀναδρομικὰ) χωρὶς πρῶτο μέλος.

Ἐτσι τὸ ἐπιχείρημα «διχοτομία» προβάλλει σοβαρὲς λογικὲς δυσχέρειες

πού συνεπάγεται για την κίνηση ή υπόθεση της συνέχειας της έκτασης και για τον έαυτό της ή ίδια ή ιδέα του χωροχρονικού συνεχούς.

Το Παράδοξο του Ἀχιλλέως και της Χελώνας.²⁵

Μᾶς ζητεῖται νὰ φανταστοῦμε ἓνα ταχύτατο σῶμα («Ἀχιλλεὺς») πού κινεῖται γιὰ νὰ φτάσῃ ἓνα ἄλλο προπορευόμενο βραδύτατο σῶμα («χελώνη»). γιὰ νὰ φτάσῃ τὸ πρῶτο στὴ θέση πού ἔφτασε τὸ δεύτερο κατὰ τὸν χρόνο πού τὸ ἴδιο ξεκίνησε, ἀπαιτεῖται ἓνα ὠρισμένο χρονικὸ διάστημα· ἀλλὰ κατὰ τὸ χρονικὸ αὐτὸ διάστημα, τὸ δεύτερο σῶμα ἔχει προωθηθῆ σὲ μιὰ περαιτέρω θέση· ὥσπου νὰ φτάσῃ τὸ πρῶτο σῶμα σ' αὐτὸ τὸ προωθημένο σημεῖο, τὸ δεύτερο σῶμα θὰ ἔχη κερδίσει πάλι κάποιο προβάδισμα, κι' ἔτσι σὲ μιὰ δραματικὴ πορεία χωρὶς τέλος. Ἄς δεχτοῦμε πὼς τὸ σῶμα A (Ἀχιλλεὺς) ξεκινᾷ ἀπὸ ἓνα δεδομένο σημεῖο E , ἐνῶ συγχρόνως τὸ σῶμα χ (χελώνα) ξεκινᾷ ἀπὸ ἓνα ἀπομακρυσμένο σημεῖο E_1 τῆς ἴδιας εὐθείας:



Τὸ A κινεῖται μὲ σταθερὴ ταχύτητα V , ἐνῶ τὸ χ κινεῖται ἐπίσης μὲ σταθερὴ ταχύτητα v . Γιὰ νὰ καλύψῃ τὸ A τὴν ἀπόσταση a (EE_1), χρειάζεται ἓνα χρόνο

$$t_1 = a/V$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸν χρόνο t_1 τὸ χ φθάνει στὸ σημεῖο E_2 καλύπτοντας μιὰ ἀπόσταση a' ($E_1 E_2$)

$$a' = vt_1 = a \frac{v}{V}$$

Γιὰ νὰ φθάσῃ τὸ A στὸ E_2 χρειάζεται ἓνα χρόνο

$$t_2 = \frac{a'}{V} = \frac{a}{V} \frac{v}{V}$$

Κατὰ τὴ διάρκεια ὅμως τοῦ t_2 τὸ χ καλύπτει τὴν ἀπόσταση a'' ($E_2 E_3$)

$$a'' = vt_2 = av^2/V^2$$

Γιὰ νὰ φθάσῃ πάλι τὸ A στὸ E_3 χρειάζεται χρόνο

$$t_3 = a''/V = \frac{a}{V} \frac{v^2}{V^2}$$

Καί κατ' αὐτὸν τὸν χρόνον τὸ χ κινεῖται πέραν τοῦ σημείου E_3 καὶ ἔτσι χωρὶς τέλος.²⁶ Ἐὰν τὰ A θὰ ἦταν δυνατόν νὰ φθάσῃ τὸ χ στὸ σημεῖο E' , ἡ διάνυση τοῦ διαστήματος $E E'$ ἀπὸ τὸ A θὰ ἦταν σὰν ἐξαντλητικὴ καταμέτρηση τοῦ πλήθους τῶν ὑποδιαστημάτων τοῦ $E E'$ μὲ χρῆσιν ὄλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων. Ἄλλὰ σὲ πεπερασμένον χρόνον εἶναι ἀδύνατον νὰ ὀλοκληρωθῇ μιὰ τέτοια ἄπειρη σειρά πράξεων. Ἡ διάνυση ἀπὸ τὸν δρομέα τῆς ἀπόστασης $E E'$ θὰ ἦταν σὰν τὴν ὀλοκλήρωση, ἀπὸ μιὰ μηχανή, ἀπειρης σειρᾶς διακεκριμένων πράξεων σὲ πεπερασμένον χρόνον.²⁷

Ἐάν, λοιπόν, δεχτοῦμε ὅτι ὁ χώρος καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετὰ μεγέθη, ὅπως ἀπαιτεῖται ἀπὸ τὸν νοῦ, ὀδηγούμαστε στὴν ἀντίφαση, γιὰτὶ κανένα ἄπειρο ἄθροισμα μὴ ἑκτατῶν σημείων δὲν ἰσοῦται μὲ κάτι ἑκτατό. Ἐάν μάλιστα λαμβάνῃ χώρα κίνηση, αὕτη πρέπει νὰ διαδίδεται διαμέσου τῶν διαδοχικῶν διαιρετῶν μερῶν τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου. Αὐτὸ ὅμως ἀποτελεῖ ἓνα ἀπλὸ νοητικὸ αἴτημα: ὁ «Ἀχιλλεὺς» δὲν μπορεῖ νὰ ὀλοκληρώσῃ τὴ σύνθεσιν ἄπειρων ὑποδιαστημάτων σὲ πεπερασμένον χρόνον γιὰ νὰ φθάσῃ τὴ «χελώνα». Ἐτσι ὁ Ζήνων ἐδειχνε τὶς λογικὰς δυσχέρειες ποὺ συνεπάγεται ἡ ὑπόθεσις τοῦ πυκνοῦ καὶ συνεχοῦς χώρου καὶ χρόνου.

Τὸ Παράδοξο τοῦ Βέλους.²⁸

Ἄς δεχτοῦμε ὅτι ἓνα βέλος τίθεται σὲ κίνηση ἀνάμεσα σὲ δύο ὀρισμένα χωρικὰ σημεῖα Σ_1 καὶ Σ_2 καὶ μεταξὺ τῶν δύο χρόνων t_1 καὶ t_2 . Ἀνάμεσα σ' αὐτὰ ὑπάρχουν πολλὰ χωρικὰ σημεῖα Σ_n καὶ ἀντίστοιχα κατὰ τὴν κίνηση πολλὰ χρονικὰ σημεῖα t_n (ὅπου $n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \Sigma_n & \Sigma_2 \\ \hline t_1 & t_n & t_2 \end{array} \rightarrow$$

Τὸ σύνολο τῶν χωρικῶν σημείων ποὺ καταλαμβάνει τὸ βέλος εἶναι ὁ χώρος ποὺ ἰσοῦται πρὸς τὶς διαστάσεις αὐτοῦ τοῦ ἀντικειμένου. Ἐάν, λοιπόν, φανταστοῦμε κατὰ συστοιχία σύνολα ἀντιληπτικῶν χωρικῶν σημείων, ἀπ' αὐτὰ ποὺ τὸ σύνολό τους ἰσοῦται πρὸς τὸ διάστημα τὸ ὁποῖο διανύει τὸ κινούμενο ἀντικείμενο, καὶ ἀντιληπτικῶν χρονικῶν σημείων τῆς διάρκειας τῆς κίνησός του, τὰ σημεῖα τοῦ ἀντικειμένου παρουσιάζονται ἀκίνητα μέσα στὰ χωροχρονικὰ αὐτὰ σημεῖα. Ἐτσι ἡ ὄλη κίνηση τοῦ ἀντικειμένου, ἡ ὁποία προὑποτίθεται στὴν ἐμπειρία μας ὡς συνεχῆς, δὲν εἶναι παρὰ μιὰ εἰκόνα ποὺ συντίθεται ἀπὸ ἀσυνεχεῖς φάσεις, δηλαδὴ μιὰ «κινηματογραφικὴ» καὶ ὄχι φυσικὴ κίνηση.

Μὲ μαθηματικὴ διατύπωση, ἓνα κινούμενο ἀντικείμενο σὰν τὸ «βέλος» θὰ ἔχη μιὰ ταχύτητα v ποὺ ἰσοῦται μὲ τὸ κλάσμα τῆς ἀπόστασης s πρὸς τὸ χρόνο t :

$$v = s/t$$

Ἐὰν δεχτοῦμε ὅτι ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος εἶναι συνεχοῦς δομῆς, πρέπει νὰ ὑπολογίζουμε ὅτι οἱ τιμὲς τῶν s καὶ t μπορεῖ νὰ γίνουν μὲ τὴ συνεχῆ διαίρεση μηδενικὲς, πράγμα ποῦ σημαίνει ἀπουσία ταχύτητος, δηλαδὴ στάση:

$$v = 0/0$$

Στάση, βέβαια, δὲν συνεπάγεται ἀπουσία χρόνου

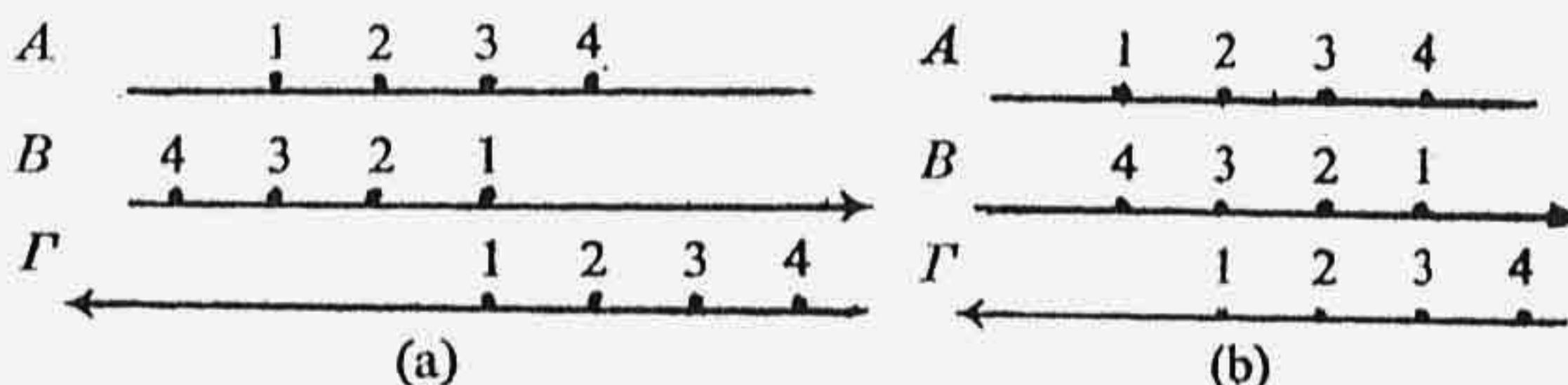
$$v = 0/t$$

πράγμα ποῦ σημαίνει ὅτι σ' ἓνα ὁποιοδήποτε χρόνο εἶναι δυνατὸ νὰ μὴν ἔχη διανυθῆ²⁹ κανένα διάστημα. Ἐὰν ὅμως δεχτοῦμε ὅτι ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος συνίστανται ἀπὸ ἄτομα σημεῖα στὰ ὅρια τῆς ἀντιληπτικότητάς μας, αὐτὰ δὲν πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἔκτατὰ καὶ συνεπῶς σὲ τέτοια χωροχρονικὰ minima ἓνα σῶμα μπορεῖ νὰ θεωρηθῆται κινούμενο, ὁπότε τὸ v θὰ ἔχη μιὰ θετικὴ τιμὴ. Ἀλλὰ κάτω ἀπὸ τὰ ὅρια αὐτὰ ἀντιληπτικότητας τὰ χωροχρονικὰ σημεῖα, ἂν δὲν διαιροῦνται περαιτέρω, δὲν σημαίνει πῶς δὲν εἶναι διαιρετά. Ἀνοίγεται, λοιπόν, ἔτσι μιὰ ἐνδιάμεση περιοχὴ, ποῦ δὲν μπορεῖ νὰ χαραχθῆ με ὅρια, ἀνάμεσα στὸ συνεχὲς καὶ στὸ ἀσυνεχὲς τῆς χωροχρονικῆς ἔκτασης, ὅπου οἱ τιμὲς s καὶ t μπορεῖ νὰ εἶναι θετικὲς ἢ μηδενικὲς. Στὴν ἐνδιάμεση αὐτὴ περιοχὴ πρέπει νὰ ἀναφέρεται τὸ ἐπιχείρημα τοῦ Ζήνωνος, ποῦ θίγει ἔτσι τὸν ἀντινομικὸ χαρακτήρα τοῦ γίνεσθαι μεταξὺ τῆς συνεχοῦς καὶ τῆς ἀσυνεχοῦς ἀποψῆς του.³⁰

Ἐὰν, λοιπόν, ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος δὲν ἔχουν συνεχῆ δομὴ, ἂν δηλαδὴ συντίθενται ἀπὸ ἀδιαίρετα ἀντιληπτὰ minima, ἢ ἀντιληπτικὰ συνεχῆς κίνηση δὲν εἶναι καθαρὰ φυσικὴ κίνηση παρὰ σύνθεση ἀπὸ ἀσυνεχεῖς φάσεις.

Τὸ Παράδοξο τοῦ Σταδίου.³¹

Ἄς φανταστοῦμε τρεῖς παράλληλες σειρὲς σημείων, A, B, Γ , ἀπὸ τίς ὁποῖες ἡ σειρά A μένει ἀκίνητη καὶ οἱ ἄλλες δύο κινούνται μὲ ἴση ταχύτητα πρὸς ἀντίθετες κατευθύνσεις μπροστὰ ἀπὸ τὴν σειρά A , κατὰ τὰ ἀκόλουθα διαγράμματα:



Τὰ A, B, Γ ἀντιπροσωπεύουν ἑδῶ χωρικὰ minima. Τὰ σημεῖα B κινούνται

πρὸς τὰ δεξιὰ περνώντας μπροστὰ ἀπὸ τὰ σημεῖα A μὲ τόση ταχύτητα ὥστε ἓνα χωρικό minimum νὰ διανύεται σὲ κάθε χρονικό minimum, ἐνῶ συγχρόνως τὰ σημεῖα Γ κινούνται πρὸς τὴν ἀντίθετη κατεύθυνση μὲ ἴση ταχύτητα καὶ μὲ τὸν ἴδιο ρυθμό. Ἔτσι κατὰ μιὰ ὀρισμένη στιγμή (ποῦ εἰκονίζεται λ.χ. στὸ διάγρ. (a)) τὸ B^1 , τὸ A^3 καὶ τὸ Γ^1 βρίσκονται ὅλα στὸ ἴδιο ὕψος. Κατὰ τὸ ἐπόμενο χρονικό minimum (διάγρ. (b)) τὸ B^1 θὰ εἶναι ἀπέναντι στὸ A^4 καὶ τὸ Γ^1 ἀπέναντι στὸ A^2 . τὸ B^3 ὅμως θὰ εἶναι ἐπίσης ἀπέναντι στὸ A^2 . ἐπομένως τὸ Γ^1 σὲ ἓνα χρονικό minimum ἔχει περάσει δύο χωρικά minima B . Θὰ πρέπει δηλαδὴ νὰ δεχτοῦμε ὅτι ἀνάμεσα στὰ δύο αὐτὰ διαδοχικά χρονικά minima παρεμβάλλεται ἓνα τρίτο χρονικό minimum κατὰ τὸ ὁποῖο τὸ Γ^1 εἶχε εὐθυγραμμιστῆ μὲ τὸ B^2 πρὶν εὐθυγραμμιστῆ μὲ τὸ B^3 . Καὶ ἡ δυνατότητα ἑνὸς ἐνδιάμεσου ἀνάμεσα σὲ δύο χρονικά minima συνεπάγεται τὴ δυνατότητα ἐνδιάμεσου καὶ ἀνάμεσα στὰ ἀντίστοιχα χωρικά minima. Ἄλλ' αὐτὸ σημαίνει ὅτι ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος δὲν συντίθενται ἀπὸ ἀδιαίρετα minima καὶ ἡ κίνηση θὰ μπορούσε νὰ θεωρηθῆ ὅτι συντελεῖται συνεχῶς, διὰ μέσου τῶν διαδοχικῶν διαιρετῶν μερῶν τῆς χωροχρονικῆς ἔκτασης.

Ἡ ἀντινομικὴ μορφή τῶν ἐπιχειρημάτων αὐτῶν ὀργανώνεται γύρω ἀπὸ τὴ θέση ὅτι ἡ πορεία διαίρεσης καὶ σύνθεσης τῆς χωρικῆς καὶ χρονικῆς ἔκτασης ὀδηγεῖ στὸ ἄπειρο. Μὲ μιὰ συνοπτικὴ διατύπωση, προβάλλονται οἱ ἀκόλουθες δύο ἀντινομικὲς προθέσεις:

θέση: Ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος εἶναι ἐκτατὰ μεγέθη ἐπ' ἄπειρον διαιρετὰ. Ἐὰν ὅμως ἡ πορεία διαίρεσης μπορῆ νὰ συνεχίζεται ἀπεριόριστα, εἶναι ἀδύνατο νὰ καθορισθῆ ποιοὶ ἐλάχιστο σημεῖο εἶναι τὸ ἔσχατο ὄριο τοῦ κάτι. Ἐνα ὁποιοδήποτε χωρικό ἢ χρονικό minimum μπορεῖ νὰ διαιρεθῆ ἐκ νέου σὲ δύο minima, γιατί τίποτε ἐκτατὸ δὲν νοεῖται νὰ ἀποδίδη, διαιρούμενο, μέρη μὴ ἐκτατά, καὶ ἔτσι ἐπ' ἄπειρον. Εἶναι ἀνάγκη, λοιπόν, ἡ δομὴ τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου νὰ εἶναι συνεχῆς.

ἀντίθεση: Ὁ χρόνος καὶ ὁ χῶρος εἶναι ἐκτατὰ μεγέθη ἀτομικῆς δομῆς καὶ γι' αὐτὸ μὴ διαιρετὰ ἐπ' ἄπειρον. Ἄς δεχτοῦμε ὅτι ἡ δομὴ τους εἶναι συνεχῆς. Ἡ σύνθεση ὅμως τοῦ συνεχοῦς δὲν εἶναι δυνατὴ μὲ συνθετικὰ μέρη ποῦ ἔχουν ὀδηγηθῆ σὲ μηδενικά ὄρια ἐκτατότητας καὶ δὲν ἀντιπροσωπεύουν παρὰ «ἐκφυλισμένα», μὴ ἐκτατὰ μεγέθη. Εἶναι, λοιπόν, ἀνάγκη νὰ εἰσαχθῆ ἡ ὑπόθεση τῆς ἀτομικῆς δομῆς τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου, ὅτι δηλαδὴ ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος συντίθενται ἀπὸ ἀδιαίρετα ἐκτατὰ minima.

Ἡ θέση προβάλλει μιὰ ἄπειρη διαιρετότητα τῆς χωροχρονικῆς ἔκτασης ποῦ συνεπάγεται μιὰ πορεία πρὸς τὰ μέσα χωρὶς ὀρισμένο τέλος. Πρόκειται, λοιπόν, γιὰ μιὰ διαίρεση τοῦ συνεχοῦς, ἡ ὁποία ὅμως ὀδηγεῖ στὴν

παράσταση «έκφυλισμένων», μὴ ἔκτατων σημείων. Διαφορετικά, τὰ σημεία σ' ἓνα σύνολο δὲν θὰ ἦταν σημεία παρὰ σύνολα σημείων. Καὶ ἡ ὑπόθεση, βέβαια, ὅτι ἓνα σύνολο μὴ ἔκτατων σημείων θὰ μπορούσε νὰ εἶναι ἔκτατό εἶναι ἀδύνατο νὰ βρῆ ἓνα ἐμπειρικό ἔρεισμα.

Ἡ ἀντίθεση προβάλλει τὴν ἀτομικὴ ὑπόθεση, ἢ ὁποία ἐνθαρρύνεται ἀπὸ τὴν ἀντίθετη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ποὺ παραμένει ἐμπειρικά ἀνεπικύρωτη. Ἐὰν τὸ συνεχές συνεπάγεται νοητικὰ ἄπειρη διαιρετότητα, δηλαδή μιὰ δυναμικὴ ἀπειρότητα ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, ὁ τρόπος αὐτὸς παράστασης τοῦ συνεχοῦς δὲν εἶναι ὁ μοναδικός, γιατί εἶναι δυνατό νὰ παρασταθῆ αὐτὸ καὶ σὲ ἐξάρτηση ἀπὸ τὴν ἐμπειρία. Ἔτσι ἡ πορεία διαίρεσης τοῦ συνεχοῦς προσκρούει σὲ ἀντιληπτικά *minima*, σὲ ἄ-τομα δηλαδή χωρικά καὶ χρονικά σημεία στὰ ὅρια τῆς ἀνθρώπινης ἀντιληπτικότητας. Ἀπ' αὐτὴ τὴν ἄποψη, ἡ ἀναδρομικὴ πορεία διὰ μέσου τῶν διαδοχικὰ διαιρετῶν μερῶν (διχοτομία καὶ στάδιο) καὶ ἡ σειρά τῶν ὄλο καὶ πιὸ μικρῶν διαστημάτων ὅπου ἡ «χελώνη» προηγεῖται τοῦς «Ἀχιλλέως», ὀδηγοῦν στὴν παράσταση συνεχῶς διαιρετῶν ὑποδιαστημάτων τὰ ὁποῖα ἐκπίπτουν ὑπὸ τὰ ἀντιληπτικά μας *minima*. Ἀντίθετα, τὸ ἐπιχείρημα ὅτι μιὰ ἀντιληπτικὴ συνεχῆς κίνηση θὰ ἦταν δυνατό νὰ ἀποτελῆ σύνθεση ἀπὸ ἀσυνεχεῖς φάσεις («Βέλος») θεωρημένες κάτω ἀπὸ τὰ ὅρια τῆς ἀντιληπτικότητας (ὅπου οἱ τιμές τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου θὰ κυμαίνονται μεταξύ 1 καὶ 0), προκαλεῖ σὲ ὑποαντιληπτικὸ ἐπίπεδο μιὰ ἐνταση ἀνάμεσα στὸ συνεχές καὶ τὸ ἀσυνεχές, τὰ ὁποῖα δὲν διαχωρίζονται μὲ ὅρια. Ἀλλὰ ἡ βάση πάνω στὴν ὁποία στηρίζεται ἡ ἀντίθεση εἶναι τὸ ἐπιχείρημα ὅτι σὲ ὑποαντιληπτικὴ κλίμακα τὰ χωροχρονικά σημεία ποὺ «έκφυλίζονται» μὲ τὴ συνεχῆ διαίρεση σὲ μὴ ἔκτατὰ μεγέθη δὲν ὑπάρχουν. Ἔτσι ἡ ὑπόθεση τῆς ἀτομικῆς δομῆς τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου προβάλλεται ὡς ἀναγκαία.

IV

Ἄν καὶ ἡ παραπάνω ἀνάλυση δείχνει ἀπὸ μόνη τῆς τίς σχέσεις Kant καὶ Ζήνωνος μέσα στὰ προβλήματα καὶ στὴ δομὴ τῆς σκέψης τους, ὥστόσο μπορούμε νὰ συναγάγουμε ἀπ' αὐτὴν ὀρισμένα γενικὰ συμπεράσματα, τονίζοντας κύρια σημεία ἀπὸ τίς μαθηματικὲς ἀντινομίες τοῦ Kant τὰ ὁποῖα μᾶς ἀνάγουν στὴν προβληματικὴ τοῦ Ζήνωνος. Γιὰ μιὰ θεματικὰ εὐλογητὴν σειρά παρατηρήσεων ἐνδείκνυται νὰ προτάξουμε ὡς βάση τὴ δεύτερη ἀντινομία, ἢ ὁποῖα μάλιστα, ὅπως θὰ φανῆ ἀπὸ τὴ συζήτηση ποὺ ἀκολουθεῖ, θὰ ἦταν πιὸ εὐλογο, ἀπὸ τὴν ἄποψη τῆς λογικῆς ἀκολουθίας τῶν προτάσεων, νὰ εἶχε προταχθῆ ἀπὸ τὸν Kant στὴ σειρά τῶν ἀντινομιῶν του. Οἱ γενικὲς παρατηρήσεις καὶ τὰ γενικὰ συμπεράσματα ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τίς παραπάνω ἀναλύσεις μποροῦν νὰ διατυπωθοῦν συνοπτικὰ ὡς ἑξῆς:

(1) Στην επιχειρηματολογία του για την *αντίθεση* τής δεύτερης αντινομίας ο Kant χρησιμοποιεί ως κεντρικό αποδεικτικό στοιχείο την *πυκνότητα του χώρου*: κάθε σύνθετη ουσία είναι δυνατή μόνον εν χώρῳ και τὰ ἀπλά μέρη κάθε σύνθετου είναι τόσα ὅσα και τὰ ἀντίστοιχα μέρη τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα εἶναι χώροι. Ἐάν λοιπὸν ἓνα σύνθετο πράγμα, ἄς ποῦμε τὸ ζηνώνειο «βέλος», ὑπόκειται σὲ συνεχή διαίρεση, τὰ διαδοχικῶς διαιρετὰ μέρη θὰ πρέπει νὰ ἐντάσσονται σὲ ἀντίστοιχα χωρικὰ μέρη. Καὶ ἐπειδὴ κάθε μέρος ἐνὸς ἔκτατοῦ καὶ γι' αὐτὸ πραγματικοῦ ἀντικειμένου ἐπιδέχεται περαιτέρω διαίρεση, ἔπεται ὅτι ἐκεῖνο ποὺ ὑπάρχει δὲν εἶναι τὸ ἀπλὸ καὶ ἀτομικὸ παρὰ τὸ σύνθετο καὶ τὸ συνεχές. Ὁ Ζήνων δείχνει μὲ τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ «Βέλους» καὶ τοῦ «Σταδίου» ὅτι ἓνας πεπερασμένος χώρος πρέπει νὰ εἶναι ἄπειρα πυκνὸς καὶ ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἐπιβάλλεται ἀπὸ τὸ αἴτημα νὰ μεταδίδεται ἡ φυσικὴ κίνηση διὰ μέσου τῶν διαδοχικῶν διαιρετῶν μερῶν τοῦ χώρου. Ἔτσι ὁ Ζήνων «ὑποστηρίζει» τὴν *αντίθεση* τής δεύτερης καντιανῆς αντινομίας. Ἀλλὰ τὰ ἐπιχειρήματά του «Διχοτομία» καὶ «Ἀχιλλεὺς» τὸν τοποθετοῦν μὲ τὸ μέρος τῆς καντιανῆς θέσης, γιατί ἂν ἡ πορεία τῆς διαδοχικῆς διαίρεσης τείνη στὸ ἄπειρο, τὰ συστατικὰ μέρη τῆς ἔκτασης γίνονται μὴ ἔκτατὰ σημεῖα (μὲ τὸν καντιανὸ ὄρο «ἀπλὲς ἰδέες»), ποὺ τὸ ἄθροισμά τους δὲν ἀποδίδει τίποτε τὸ πραγματικὸ, καὶ ἔτσι ὀδηγεῖται κανεὶς στὸ «ἄτοπο» τῆς σύνθεσης τοῦ ἔκτατοῦ ἀπὸ μὴ ἔκτατὰ σημεῖα.

(2) Ὡς πρὸς τὴν πυκνότητα τοῦ χρόνου ἡ προβληματικὴ τοῦ Ζήνωνος θὰ βρεθῆ ἐν μέρει στὴν πρώτη καντιανὴ αντινομία. Μὲ ὄρους τοῦ ἐπιχειρήματος τῆς «Διχοτομίας», ἐάν ὁ κόσμος ἔχη διανύσει ὡς τὴν παρούσα στιγμή μιὰ πορεία a ἐν χρόνῳ, θὰ πρέπει κάποτε νὰ εἶχε διανύσει τὸ μισὸ τῆς πορείας ($a/2$). Καὶ πρὶν τὸ διανύσει αὐτό, θὰ εἶχε διανύσει τὸ ἓνα τέταρτο τῆς πορείας ($a/2^2$) κι' ἔτσι χωρὶς τέλος σὲ μιὰ ἀναδρομικὴ σειρὰ χρονικῶν ὑποδιαστημάτων χωρὶς πρῶτον ὄρο:

$$\dots, a/2^n, \dots, a/2^3, a/2^2, a/2, a$$

Ἐάν, λοιπὸν, ἡ πορεία τοῦ κόσμου εἶναι χρονικὰ πεπερασμένη καὶ ὁ κόσμος ἔχη μιὰ ἀρχή, δὲν μπορεῖ νὰ βρεθῆ κανένα *πρῶτο* χρονικὸ σημεῖο καὶ ἀντίστοιχα κανένα *πρῶτο* φυσικὸ συμβάν. Ἔτσι ὁ Ζήνων θὰ ἦταν κι' ἐδῶ ταγμένος μὲ τὸ μέρος τῆς καντιανῆς *αντίθεσης*: μιὰ χρονικὴ σειρὰ δὲν μπορεῖ νὰ ἄρχισε μιὰ φορὰ καὶ ἐπομένως εἶναι ἄπειρη. Κι' αὐτὸ ἰσχύει, βέβαια, γιὰ ὁποιαδήποτε χρονικὴ σειρὰ, ὁσοδήποτε μικρὴ καὶ ὁσοδήποτε μεγάλη. Μὲ τὴν προϋπόθεση, λοιπὸν, τῆς *αντίθεσης* τῆς δεύτερης αντινομίας ποὺ εἰσηγεῖται τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς, κατανοεῖται ἐδῶ ἡ ἄποψη, ποὺ τοποθετεῖ τὸν Ζήωνα μὲ τὸ μέρος τῆς *αντίθεσης* τῆς πρώτης αντινομίας, ὅτι μιὰ χρονικὴ σειρὰ δὲν μπορεῖ νὰ ἄρχισε μιὰ φορὰ. Ἀλλὰ μὲ τὴν προϋπόθεση τῆς ἄποψης τῆς ἀτομικότητας, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὰ ἐπιχειρήματα «Διχοτομία» καὶ «Ἀχιλλεὺς» ποὺ θὰ ἔκαναν τὸν Ζήωνα νὰ ταχθῆ μὲ τὸ μέ-

ρος τῆς θέσης τῆς δεύτερης ἀντινομίας, κατανοεῖται ἡ ἄποψη ὅτι μιὰ χρονική σειρά πεπερασμένης σύνθεσης πρέπει νὰ ἔχη μιὰ ἀρχὴ καὶ νὰ εἶναι δυνατὸ νὰ βρεθῆ σ' αὐτὴν ἓνα πρῶτο κι' ἓνα τελευταῖο σημεῖο. Ἔτσι ὁ Ζήνων θὰ τασσόταν μὲ τὸ μέρος τῆς θέσης τῆς πρώτης ἀντινομίας.

(3) Εἰδικὰ ἡ πρώτη ἀντινομία τοῦ Kant καὶ τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος «Ἀχιλλεὺς» δείχνουν ὅτι πρέπει νὰ κάνουμε διάκριση ἀνάμεσα στὴν δυνητικὴ ἀπειρότητα καὶ στὴν πραγματικὴ ἀπειρότητα. Ἔτσι μιὰ κοσμικὴ σειρά συμβάντων ποὺ ἔχει περάσει πραγματικά, δηλαδή ἐν χρόνῳ καὶ μιὰ πραγματικὴ ἀπειρὴ σειρά πράξεων ποὺ δεχόμαστε ὅτι χρειάζεται ὁ Ἀχιλλεὺς γιὰ νὰ περάσει τὴν χελώνα προϋποθέτουν ἐφαρμογὴ μιᾶς δυνητικῆς ἀπειρότητας στὴν πραγματικότητα. Ὡς πρὸς τὸ ζηνώνειο παράδοξο πρέπει νὰ γίνεται διάκριση ἀνάμεσα στὸ ἀπειρο σύνολο θέσεων ποὺ πρέπει νὰ περάσει ὁ Ἀχιλλεὺς καὶ στὶς πράξεις τοῦ νὰ τὶς περάσει. Θὰ ἔπρεπε νὰ ἐξομοιώνονται οἱ πράξεις αὐτὲς μὲ τὶς πράξεις ἀρίθμησής τους ἐν χρόνῳ.³² Τὸ μαθηματικὸ ἀπειρο εἶναι ἓνα τρομαχτικὰ ἰσχυρὸ ἐργαλεῖο, πράγμα ποὺ γιὰ πρώτη φορὰ φάνηκε μὲ τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος. Ἀλλὰ ἡ ἀπειρότητα τοῦ Kant δὲν ἔχει τὴν ἴδια δύναμη. Τὸ ἐπιχείρημα εἰδικὰ τῆς ἀπειρῆς σειράς στὴν πρώτη ἀντινομία ἀναφέρεται στὸ μὴ δυνατὸ μιᾶς ἀπειρῆς σειράς πράξεων, ἡ ὁποία νὰ ἔχη ἤδη στὴν πραγματικότητα συμβῆ ὡς τώρα, ἐνῶ τὸ ζηνώνειο παράδοξο ἀναφέρεται στὴ δυνατότητα μιᾶς ἀπειρῆς σειράς πράξεων στὸ μέλλον, ἡ ὁποία ὅσο κι' ἂν θὰ ἀναπτύσσεται θὰ παραμένῃ ἓνα δυνητικὸ ἢ ἀσυμπλήρωτο ἀπειρο.³³ Ὁ Whitrow παρατηρεῖ ἔξυπνα μιὰ βασικὴ διαφορὰ τῆς ἀντινομίας τοῦ Kant ἀπὸ τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος «Ἀχιλλεὺς»: ἐνῶ ἡ καντιανὴ ἀντινομία προβάλλει μιὰ «ἀπειρὴ σειρά» ἡ ὁποία ἐκλαμβάνεται «ἐξ ὑποθέσεως ὅτι ἔχει πραγματικὰ συμβῆ», στὸ ζηνώνειο παράδοξο «ἡ ἀπειρὴ σειρά διαδοχικῶν πράξεων εἶναι μιὰ καθαρὰ ἰδεατὴ σειρά ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴ μέθοδό μας γιὰ ἀνάλυση».³⁴

(4) Στὴν ἀπόδειξη ἐξάλλου τῆς ἀντίθεσης τῆς πρώτης ἀντινομίας ὁ Kant ἐπικαλεῖται ὡς πρὸς τὸν χῶρο τὸ ἐπιχείρημα, τὸ ὁποῖο χρησιμοποιεῖ καὶ γιὰ τὴν ὑποστήριξη τῆς τακτικῆς τοῦ Ζήνωνος στὸ κείμενό του ποὺ ἤδη ἀναφέραμε (B 530). Ὅπως στὸ κείμενο αὐτὸ κάνει λόγο γιὰ τὸ ἄτοπο τῆς ὑπαρξῆς ὁποιοῦδήποτε πράγματος ἔξω ἀπὸ τὸ σύμπαν, ἀνάλογα στὴν ἐπιχειρηματολογία τῆς ἀντίθεσης τῆς πρώτης ἀντινομίας τὸ ἄτοπο τῆς ὑπόθεσης ἐνὸς ἀπειρου χῶρου (ὅπως τοῦ ἀπολύτου χῶρου τοῦ Newton) δικαιολογεῖται μὲ τὴν παρατήρηση ὅτι ἔξω ἀπὸ τὸν κόσμον δὲν νοεῖται τίποτε ὑπαρκτὸ καὶ ἐπομένως κανένα correlatum τοῦ κόσμου. Καί, ὅπως παρατηρήσαμε γιὰ τὴν πρώτη περίπτωση, ἰσχύει κι' ἐδῶ ὡς ὑπόβαθρο τοῦ ἐπιχειρήματος τὸ ἄτοπο, ποὺ ἐπισήμανε ὁ Ζήνων, ἐνὸς χῶρου ποὺ ὑπάρχει ἐν χῶρῳ καὶ ἔτσι ἐπ' ἀπειρον. Καὶ ὡς πρὸ τὸν ἐσωτερικὸ ὀρίζοντα τοῦ χῶρου τὸ ἐπιχείρημα αὐτὸ τοῦ Ζήνωνος μπορεῖ νὰ ἀνιχνευτῆ καὶ στὴν ἐπιχειρηματολογία τῆς ἀντίθεσης τῆς δεύτερης ἀντινομίας: ἡ πραγματικὴ τοῦ

σύνθετου δρίζεται ἐν χώρῳ καὶ ἂν αὐτὸ θὰ συνίστατο ἀπὸ ἀπλά μέρη, αὐτὰ θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπάρχουν ἐν χώρῳ καὶ νὰ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτὰ χώροι, ποὺ θὰ ἐπιδέχωνται περαιτέρω διαίρεση κ.ο.κ. χωρὶς τέλος· καθετί, λοιπὸν, πραγματικὸ εἶναι σύνθετο καὶ ὑπάρχει σὲ σύνθετο, δηλαδὴ ἐπ' ἄπειρον διαιρετὸν χῶρο.

(5) Σήμερα, βέβαια, εἶναι κοινὸς τόπος στὴν ἀναλυτικὴ γεωμετρία ὅτι ἓνα ἐκτεινόμενο τμήμα θετικοῦ μήκους θεωρεῖται ἀποτελούμενο ἀπὸ μὴ ἐκτεινόμενα σημεῖα (καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει μῆκος μηδέν). Ἀνάλογα, προβάλλεται τὸ αἴτημα ὥστε χρονικὰ διαστήματα θετικῆς διάρκειας νὰ εἶναι ἄθροίσματα στιγμῶν, καθεμιά ἀπὸ τίς ὁποῖες νὰ ἔχη διάρκεια μηδέν.³⁵ Ἀλλὰ μιὰ ἄπειρη πορεία διαίρεσης ὁποιασδήποτε ἔκτασης, ὅσοδήποτε μικρῆς, θὰ ἀπέδιδε μιὰ ἄπειρη σειρά σημείων ποὺ τὸ καθένα δὲν θὰ ἀντιπροσώπευε καμιά πραγματικὴ ποσότητα. Καὶ ὁ Ζήνων στηριζόταν στὸ ἀξίωμα ὅτι ἓνα ἄθροισμα σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ἔκτατὰ μεγέθη (ἀδιάφορο πεπερασμένου ἢ ἄπειρου ἀριθμοῦ) παρὰ μηδενικὰ σημεῖα, πρέπει ἀναγκαστικὰ νὰ εἶναι μηδέν. Τὸ ἀξίωμα αὐτὸ στὸ ἐπιχείρημα γιὰ τὴ θέση τῆς δεύτερης ἀντινομίας παίρνει τὴ μορφή τῆς ἀρχῆς ὅτι ἡ σύνθεση σὲ μιὰ σύνθετη ὕλική οὐσία πρέπει νὰ εἶναι θεωρητικὰ μεταθέσιμη χωρὶς νὰ βλάπτεται ἢ ὑπαρξὴ αὐτοῦ ἀπὸ τὸ ὁποῖο ἀποτελεῖται ἐξολοκλήρου τὸ σύνθετο. Τόσο λοιπὸν τὸ παραπάνω ἀξίωμα τοῦ Ζήνωνος ὅσο καὶ ἡ σχετικὴ ἀρχὴ ποὺ υἱοθετεῖ ὁ Kant ὑπαγορεύουν νὰ θεωρηθῆται τὸ σύνθετο ἀποτελούμενο ἀπὸ μὴ σύνθετα μέρη.

Σημειώσεις.

1. Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie I, Sämtliche Werke, ἐκδ. H. Glockner, Stuttgart-Bad Cannstatt 1965, τόμ. 17, 342. Εἶναι ἀξιοσημείωτο πὼς ὁ Hegel ἀφιερώνει στὸν Ζήωνα, «τὸν πρωτεργάτη τῆς διαλεκτικῆς» τὴν ἐκτενέστερη ἐκθεση ἀπὸ κάθε ἄλλον προσωκρατικὸ φιλόσοφο (μὲ μόνη ἐξαίρεση τὸν Ἀναξαγόρα).

2. Ὁ A. Grünbaum, *Modern Science and Zeno's Paradoxes*, Wesleyan University Press 1967, ποὺ ἀποτελεῖ τὸ πιὸ χαρακτηριστικὸ πρόσφατο παράδειγμα ἐρευνητοῦ ὁ ὁποῖος ἐξετάζει τὰ «παράδοξα» τοῦ Ζήνωνος μὲ σύγχρονο ἐπιστημονικὸ πνεῦμα, δὲν αἰσθάνεται καθόλου τὴν ἀνάγκη νὰ κάνῃ τὴν παραμικρὴ ἀναφορὰ στὶς μαθηματικὲς ἀντινομίες τοῦ Kant. Βλ. ἀκόμα M. Black, *Problems of Analysis. Philosophical Essays*, London 1954, 95 - 154, J. Man, *Zum Problem des Infinitesimalen bei den antiken Atomisten*, Berlin 1954, καὶ P. Benacerraf, *Tasks, Super-Tasks and the Modern Eleatics*, «The Journal of Philosophy» 59 (1962), 765 - 784.

3. Refl. 5037 (Kant's gesammelte Schriften, Akademie-Ausgabe, Berlin 1910 - 1955, XVIII, 69).

4. Ὀνομάζονται κοινῶς «παράδοξα», ἀλλὰ αὐτὸ δὲν εἶναι ἓνα κυριολεκτικὰ ἀκριβὲς ὄνομα. Οἱ προτάσεις τοῦ Ζήνωνος συνιστοῦν μᾶλλον ἀντινομικὰ ἐπιχειρήματα παρὰ φαινομενικὰ παράλογες προτάσεις.

5. Ὁ B. Russell, *Our Knowledge of the External World*, London 1951, 183 λέγει χαρα-

κτηριστικά ότι τὰ ζηνώνεια επιχειρήματα έχουν υποστηρίξει κατά κάποιο τρόπο «δλες σχεδόν τις θεωρίες του χώρου και του χρόνου και του άπειρου που έχουν διαμορφωθεί από την εποχή του ως σήμερα». — Παράξενα, Ιστορικοί της αρχαίας ελληνικής φιλοσοφίας και επιστήμης, του κύρους λ.χ. του *E. Zeller*, *Die Philosophie der Griechen I*, Hildesheim 1963 (6η έκδ. του *W. Nestle*), 762 κ.έ., έδωσαν μιá πολύ περιορισμένη και ύποτιμητική θέση στον Ζήνωνα. Πβ., ανάλογα, τή θέση που άπονέμει στον Ζήνωνα ό *W. K. C. Guthrie*, *A History of Greek Philosophy*, II, Cambridge 1969, 80 κ.έ.

6. B 454 κ.έ. (*Kritik der reinen Vernunft*, 2η έκδ.): Kant's gesammelte Schriften, Akademie-Ausgabe, τόμ. III, Berlin 1911.

7. B 450 - 52.

8. B 530 - 31.

8α. Ότι ό Σέξτος ό Έμπειρικός (*Adv. math.* III, 47 κ.έ.) χρησιμοποίησε επιχειρήματα του Ζήνωνος για ύποστήριξη σκεπτικιστικών θέσεων δέν άποτελεί τεκμήριο που θα έπειθε όπωσδήποτε τον Kant να βλέπη τον Ζήνωνα ένταγμένο μέσα στην αρχαία σκεπτική παράδοση. Δέν θα έδικαιολογείτο ή έξαιρετική τιμή που του άποδίδει ό Kant, άν μάλιστα λαμβάναμε ύπόψη τή γνώμη του ότι ή αρχαία σκεπτική μέθοδος δέν διαφέρει από την σοφιστική τέχνη, που είναι άσχετη προς την αναζήτηση της αλήθειας. Βλ. τήν ειδική έρευνα του *G. Tonelli*, *Kant und die antiken Skeptiker*, Studien und Materialien zur Geschichte der Philosophie, έκδ. *H. Heimsoeth*, *D. Henrich* και *G. Tonelli*, τόμ. 6: Studien zu Kants philosophischer Entwicklung, Hildesheim 1967, 98 κ.έ.

9. B 530 - 31.

10. Ό *G. Calogero*, *Studien über den Eleatismus*, Hildesheim - New York 1970 (1932), 170, σημ. 69, τόνισε ύπερβολικά τó περιστασιακό αυτό γεγονός ως προς τó πρόβλημα της έρμηνείας του Ζήνωνος μέσα από τον Kant (και τον Hegel), χωρίς ώστόσο να κάνει όποιαδήποτε συγκεκριμένη παρατήρηση που θα δικαιολογούσε αυτή τήν έμφαση. Για τήν διδασκαλία του Ζήνωνος ό Kant ήταν σε θέση να άντλήση στοιχεία από τήν μαρτυρημένα γνωστή σ' αυτόν *Historia critica philosophiae* του *Brucker*, όπου γίνεται λόγος ότι κατά τον Ζήνωνα τó έν δέν είναι ούτε πεπερασμένο ούτε άπειρο, ότι τó έν-θεός δέν μπορεί ούτε να κινηται ούτε να είναι άκίνητο (βλ. *H. Heimsoeth*, *Transzendente Dialektik II*, Berlin 1967, 302, σημ. 173).

11. B 532.

12. VS, 29 B 5· A 24 (*H. Diels-W. Kranz*, *Die Fragmente der Vorsokratiker I*, Dublin-Zürich 1972 (6η έκδ. 1951), 498, 8· 253, 7.

13. Διατύπωση του *G. Vlastos*, *Zeno of Elea*, «*The Encyclopedia of Philosophy*», έκδ. *P. Edwards*, New York 1967, 375.

14. Ό *E. Boutroux*, *La philosophie de Kant*, Paris 1965, 205 έλεγε χαρακτηριστικά στα μαθήματά του για τον Kant στη Σορβόνη ότι «στον Ζήνωνα τον Έλεάτη βρίσκουμε άληθινές άντινομίες, τέλεια πρότυπα της μεθόδου που ό Kant έπρόκειτο να ακολουθήση». Άλλά ή θέση αυτή έμενε άθεμελίωτη.

15. Μοναδική έξαίρεση άποτελεί ένας ύπαινιγμός του επιχειρήματος «Άχιλλεύς και Χελώνα» στην Κριτική του δεύτερου παραλογισμού της Έπερβατολογικής Ψυχολογίας (A 351: IV, 222 Ak. - Ausg.): ό δεύτερος παραλογισμός είναι ό «Άχιλλεύς» όλων των διαλεκτικών συμπερασμάτων της διδασκαλίας της ψυχής και δέν είναι άπλώς ένα «σοφιστικό παιγνίδι».

16. *Dictionnaire historique et critique*, 3η έκδ., Rotterdam 1720, άρθρ. *Zénon d'Elée*, τόμ. 4, 2907 κ.έ.

17. *Clavis Universalis, or a new Inquiry into Truth. Being a demonstration of the non-existence, or impossibility of an external World*, London 1713, 63 κ.έ.

18. *H. J. de Vleeschauwer*, *Les antinomies Kantienues et la Clavis Universalis*, «*Mind*» 68 (1938), 319 - 20.

18a. VS, 29 B 1 και 2.

19. V S, 29 B 3
20. Πβ. *H. D. P. Lee, Zeno of Elea, Cambridge, 1936, 31.*
21. V S, 29 A 25.
22. *Grünbaum, 64.*
23. Πβ. *Calogero, 135 - 36.*
24. *Grünbaum, 41, 73.*
25. V S, 29 A 26.
26. Βλ. την λεπτομερή διερεύνηση του *Grünbaum, 100 κ.έ.*
27. Βλ. για παράδειγμα την άπειρομηχανή «Alpha» του *M. Black, Problems of Analysis, Philosophical Essays, London 1954, 102.* Πβ. *H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, 3η έκδ., München-Wien 1966, 61*
28. V S, 29 A 27.— Βλ. ως προς το παράδοξο αυτό την όξυδερκή έρευνα του *Gr. Vlastos, A Note on Zeno's Arrow, «Phronesis» 11 (1966), 3 - 18.*
29. *Vlastos, 12.*
30. Παραδίδεται ένα έπιχείρημα (V S, 29 A 29), πού είναι άμφίβολο άν ανάγεται στον ίδιο τον Ζήνωνα, τó έπιχείρημα για τον «κόκκο» από κεχρί πού πέφτει στο έδαφος και τον «ήχο» πού προκαλεί ή πτώση του. Ένας σωρός από κόκκους πού ρίχνεται κάτω κάνει άναμφίβολα ένα κρότο, ένώ ένας κόκκος μπορεί νά μήν κάνει θόρυβο όταν πέφτη, ή ένας κόκκος κάνει θόρυβο πέφτοντας ένώ τó μυριστό του δέν κάνει. Άλλά ύπάρχει σίγουρα μιá όρισμένη ποσοτική σχέση άνάμεσα στον ένα κόκκο και στους κόκκους πού περιέχονται στο σωρό ή άνάμεσα στον ένα κόκκο και στο μυριστό του. Άρα πρέπει άναγκαστικά νά ύπάρχη και μιá άνάλογη προς αυτήν σχέση μεταξύ των άντίστοιχων θορύβων πού παράγονται από την πτώση των ποσοτήτων αυτών. Έάν, λοιπόν, ύπάρχει ένα minimum άκουστικής άντιληπτικότητας, ή δομή του συνεχούς ήχου πού διαδίδεται μέσω του άέρα (με κραδασμούς αυτού) είναι για μās «κοκκώδης». Έάν πάλι προβλέψη κανείς τó γεγονός ότι ύπάρχει ένα minimum άντιληπτικότητας ως προς τούς κραδασμούς του άέρα και ίσχυρισθή ότι τó κατώτερο αυτό όριο, άν δέν ύποδιαιρήται, δέν σημαίνει πώς δέν είναι διαιρετό, όδηγείται στην άποψη του συνεχούς. Άλλά πρέπει νά τονίζεται ή διαφορά άνάμεσα στο μαθηματικό συνεχές, πού σημαίνει ότι άνάμεσα σε δυó σημεία μιās έκτασης ύπάρχει πάντοτε ένα τρίτο ένδιάμεσο, και στο άντιληπτικό συνεχές όπου τά μέλη προύποτίθενται άμεσα διπλανοί γείτονες, χωρίς ένδιάμεσο (βλ. για τó άντιληπτικό αυτό continuum, *W. James, Some Problems of Philosophy, New York 1911, 187.*)
31. V S, 29A 28.
32. Βλ. *G. J. Whitrow, The Natural Philosophy of Time, New York and Evanston 1963, 148* και *J. D. North, The Measurement of Universe, Oxford 1965, 392.*
33. *Whitrow, 148.*
34. *Whitrow, 152.*
35. *Grünbaum, 115.*