Richard MONTAGUE

ΠΡΑΓΜΑΤΟΛΟΓΙΑ[1]*

Ἡ μελέτη τῆς γλώσσας (ἡ *σημείωση* ἢ *σημειωτική*) χωρίστηκε ἀπὸ τὸν Morris [1] σὲ τρεῖς κλάδους — τὸ συντακτικό, τὴ σημασιολογία καὶ τὴν πραγματολογία — ποὺ μποροῦν περίπου νὰ χαρακτηριστοῦν μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο. Ἡ σύνταξη ἀσχολεῖται μόνο μὲ τὶς σχέσεις ἀνάμεσα στὶς γλωσσικὲς ἐκφράσεις· ἡ σημασιολογία μὲ τὶς σχέσεις ἀνάμεσα στὶς ἐκφράσεις καὶ στὰ ἀντικείμενα στὰ ὁποῖα ἀναφέρονται· κι ἡ πραγματολογία μὲ τὶς σχέσεις ἀνάμεσα στὶς ἐκφράσεις, στὰ ἀντικείμενα στὰ ὁποῖα ἀναφέρονται καὶ σὲ ἐκείνους ποὺ χρησιμοποιοῦν τὶς ἐκφράσεις ἢ στὰ πλαίσια χρησιμοποίησης τῶν ἐκφράσεων.

Ἡ σύνταξη εἶχε κιόλας ἀναπτυχθεῖ ἀρκετὰ τὴν ἐποχὴ ποὺ ὁ Morris ἔγραφε, κυρίως ἀπὸ τὸν Tarski, τὸν Gödel καὶ ἀπὸ μέλη τῆς σχολῆς τοῦ Hilbert. (Βλέπε Tarski [2-4], Gödel [5], Hilbert καὶ Bernays [6]). Τὸ μεγαλύτερο μέρος τῆς σύγχρονης ἐργασίας στὴ σύνταξη ἐντάσσεται σ' ἕναν ἀπὸ τοὺς δύο κλάδους τοῦ πεδίου — στὴ θεωρία τῆς ἀπόδειξης ἢ ἀκόμη στὸ δοκιμαστικὸ πεδίο τῆς μαθηματικῆς γλωσσολογίας.

Τὰ θεμέλια τῆς σημασιολογίας εἶχαν κι αὐτὰ τοποθετεῖ (Tarski [1]) τὴν ἐποχὴ τῶν παρατηρήσεων τοῦ Morris· ἀλλὰ ἡ πιὸ ἐκτεταμένη ἀνάπτυξή της συνέβηκε ἀπὸ τότε μὲ τὸ ὄνομα 'Θεωρία τῶν ὑποδειγμάτων' (model theory). (Δὲς τὴ συλλογὴ Addison, Henkin καὶ Tarski [8] γιὰ μιὰ ἐκτεταμένη βιβλιογραφία καὶ τὸ ἄρθρο Model Theory σὲ τοῦτο τὸν τόμο[2].) Προτάθηκε — λ.χ. στὸ ἄρθρο VII τοῦ Quine [9] — ἡ σημασιολογία νὰ διαιρεθεῖ σὲ δύο πεδία: σὲ μία θεωρία τῆς ἀναφορᾶς, ἀντίστοιχη στὴ θεωρία τῶν ὑποδειγμάτων καὶ στὴ δουλειὰ τοῦ Tarski, καὶ σὲ μιὰ θεωρία τοῦ νοήματος. Μετὰ ἀπὸ ἔρευνα, ἡ πρόταση αὐτὴ δὲν φαίνεται νὰ ἀποτελεῖ τὴν καλύτερη ταξινόμηση: ἡ θεωρία τοῦ νοήματος, ὅπως φαίνεται, μπορεῖ πιὸ φυσικὰ νὰ διευθετηθεῖ μέσα στὴν πραγματολογία, ὅπως συμβαίνει στὸ κεφάλαιο 2 πιὸ κάτω.

Ὡστόσο τὴν ἐποχὴ τῆς μονογραφίας τοῦ Morris, ἡ πραγματολογία ἦταν ἀκόμα φουτουριστική. Ἀπὸ τὸν Bar-Hillel [10] προτάθηκε ἡ πραγματολογία νὰ ἀσχοληθεῖ μὲ αὐτὸ ποὺ ὁ C.S. Peirce εἶχε ὀνομάσει *δεικτολογικὲς ἐκφράσεις* (indexical expressions) τὸν περασμένο αἰώνα, δηλαδὴ λέξεις καὶ ἀποφάνσεις ποὺ ἡ ἀναφορά τους δὲν μπορεῖ νὰ καθοριστεῖ χωρὶς νὰ γνωρίζουμε τὸ πλαίσιο τῆς χρήσης τους[3]. Παραδείγματα ἀποτελοῦν οἱ λέξεις 'Ἐγώ' καὶ 'ἐδῶ', καθὼς καὶ οἱ ἀποφάνσεις ποὺ συνεπάγονται χρόνους.

* Pragmatics. Ἀπό: Contemporary Philosophy, ed. R. Klibansky (La Nuova Italia, Firenze 1968), I, 102-122 © Institut International de Philosophie, Paris. Εἰδικὴ ἄδεια τοῦ ἐκδότη.

Ἡ πραγματολογία δὲν ἔδειξε καμιὰ ἀκριβῆ τεχνικὴ δομὴ ὡς τὸ 1959, ὅταν ὁ παρὼν συγγραφέας — ἀργότερα μὲ τὴ συμμετοχὴ ἄλλων — ἄρχισε νὰ κάνει σκέψεις ποὺ ὡς τώρα ἔχουν, στὸ μεγαλύτερο τους μέρος, μείνει ἀδημοσίευτες. Μοῦ εἶχε φανεῖ πὼς ἡ πραγματολογία θὰ ἔπρεπε ἀρχικὰ νὰ ἀκολουθήσει τὴ σημασιολογία, ποὺ ἐνδιαφέρεται πρωταρχικὰ γιὰ τὴν ἔννοια τῆς ἀλήθειας (σὲ ἕνα ὑπόδειγμα ἢ κάτω ἀπὸ μιὰν ἑρμηνεία), καὶ ἑπομένως νὰ ἀσχοληθεῖ κι αὐτὴ μὲ τὴν ἀλήθεια — ὡστόσο σχετικὰ ὄχι μόνο μὲ μιὰν ἑρμηνεία ἀλλὰ καὶ σχετικὰ μ' ἕνα πλαίσιο χρήσης.

Διατύπωσα μιὰν ἀνάλυση αὐτῆς τῆς ἔννοιας γιὰ ἕναν ἀριθμὸ εἰδικῶν περιπτώσεων· καὶ σὲ πολλὲς ἀπὸ αὐτὲς τὶς περιπτώσεις, ἕνα ἀπὸ τὰ σημαντικὰ γνωρίσματα ἦταν ἡ ἐπεξεργασία τῶν ποσοδεικτῶν ποὺ πρῶτος ἔκανε ὁ μαθητής μου, καθηγητὴς Nino Cocchiarella, ἀναφορικὰ μὲ τὴ λογικὴ τῶν χρόνων· αὐτὸ τὸ γνώρισμα ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχει καὶ στὴ γενικὴ ἀνάπτυξη ποὺ γίνεται πιὸ κάτω. Σ' αὐτὴ τὴν πρώιμη ἐργασία, ἡ ἀλήθεια καὶ ἡ ἱκανοποίηση ὁρίζονταν ξανὰ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ γιὰ κάθε εἰδικὴ περίπτωση. Ἰδιαίτερα, δὲν ὑπῆρχε ἑνοποιημένη ἐπεξεργασία τῶν τελεστῶν ὡς τὸ 1965, χρονιὰ στὴν ὁποία ὁ Δρ Charles Howard κι ἐγὼ καταφέραμε νὰ φτάσουμε στὴν πλήρη τυπικὴ ἑνότητα.

1. *Γλῶσσες καὶ ἑρμηνεῖες.* Ἂς σκιαγραφήσω τὴ γενικὴ μέθοδο.

Μὲ τὸν ὅρο *πραγματολογικὴ γλώσσα* ἐννοοῦμε μιὰ γλώσσα ποὺ ἔχει σύμβολα (ἢ ἀτομικὲς ἐκφράσεις) τῶν ἀκόλουθων κατηγοριῶν:

(1) τὶς *λογικὲς σταθερές*, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, Λ, V, $=$ (ποὺ διαβάζονται ἀντίστοιχα «δὲν εἶναι ἡ περίπτωση ὅτι», «καί», «ἤ», «ἄν... τότε», «τότε καὶ μόνο τότε», «γιὰ κάθε», «γιὰ μερικά», «ταυτίζεται μέ»)·

(2) παρενθέσεις·

(3) τὶς (ἐπιμέρους) μεταβλητὲς $v_o, \ldots, v_k, \ldots$·

(4) κατηγορήματα n– θέσεων, γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n (δηλαδή, μὴ ἀρνητικὸ ἀκέραιο) συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ κατηγορήματος 1–θέσης ποὺ ὑποδηλώνεται E (διάβαζε «ὑπάρχει»)·

(5) n– θέσια σύμβολα πράξεων, γιὰ κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ n·

(6) n– θέσιους τελεστές, γιὰ κάθε θετικὸ ἀκέραιο n.

Ἀπαιτοῦμε κάθε πραγματολογικὴ γλώσσα νὰ ἔχει ὅλα τὰ σύμβολα τῶν κατηγοριῶν (1), (2) καὶ (3). Καὶ μποροῦμε ἑπομένως νὰ ταυτίσουμε μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα μὲ τὴν κλάση τῶν κατηγορημάτων, συμβόλων πράξεων καὶ τελεστῶν ποὺ περιέχει. Ἔτσι, κάθε σύνολο τέτοιων συμβόλων ἀποτελεῖ, γενικά, μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα.

Ἕνας τελεστὴς n θέσεων εἶναι ἕνα σύμβολο πού, ὅταν τεθεῖ μπροστὰ σὲ μιὰ σειρὰ (string) ἀπὸ n ἀποφάνσεις, γεννᾶ μιὰ ἄλλη ἀπόφανση. Παραδείγματα μονοθέσιου τελεστῆ εἶναι οἱ φράσεις «κατ' ἀνάγκη», «θὰ συμβεῖ νὰ εἶναι»· καὶ διθέσιου τελεστῆ, οἱ φράσεις «ἂν συνέβαινε ὅτι. . . θὰ συνέβαινε ὅτι - - -», «μὲ τὴν ὑπόθεση ὅτι. . . εἶναι πιθανὸ στὸ βαθμὸ 1 ὅτι - - -». Ἀποκλείω τελεστὲς 0 θέσεων γιατὶ δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ ξεχωρίσουν ὡς πρὸς τὴ λειτουργία ἀπὸ κατηγορήματα 0 θέσεων.

Οἱ ὅροι (ὑποδηλωτικὲς ἐκφράσεις) καὶ οἱ τύποι μιᾶς πραγματολογικῆς γλώσσας κατασκευάζονται ὅπως θὰ περιμέναμε. Γιὰ νὰ τὸ πῶ ρητά, τὸ σύνολο τῶν ὅρων τῆς L εἶναι τὸ ἐλάχιστο σύνολο Γ ὥστε:

(1) ὅλες οἱ μεταβλητὲς ἀνήκουν στὸ Γ,

(2) τὸ Γ περιέχει τὸ $A\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1}$ κάθε φορὰ ποὺ τὸ Α εἶναι n-θέσιος τελεστὴς καὶ τὰ $\zeta_0, \zeta_1 \ldots \zeta_{n-1}$ εἶναι στὸ Γ[4],

καὶ τὸ σύνολο τῶν τύπων τῆς L εἶναι τὸ ἐλάχιστο σύνολο Δ μέ:

(1) τὸ Δ περιέχει τὸ $P\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1}$ κάθε φορὰ ποὺ τὸ P εἶναι κατηγόρημα n-θέσιο τῆς L καὶ τὰ $\zeta_0 \ldots \zeta_{n-1}$ εἶναι ὅροι τῆς L καὶ ἐπίσης καὶ τὸ $\zeta = n$ κάθε φορὰ ποὺ τὰ ζ καὶ n εἶναι ὅροι τῆς L,

(2) τὸ Δ περιέχει τὰ $\neg \varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$ καὶ $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ κάθε φορὰ ποὺ τὰ φ, ψ ἀνήκουν στὸ Δ·

(3) τὸ Δ περιέχει τὰ $\Lambda n\varphi$ καὶ $V n\varphi$ κάθε φορὰ ποὺ τὸ n εἶναι μεταβλητὴ καὶ τὸ φ ἀνήκει στὸ Δ, καὶ

(4) τὸ Δ περιέχει τὸ $N\varphi_0 \ldots \varphi_{n-1}$ κάθε φορὰ ποὺ τὸ Ν εἶναι ἕνας n-θέσιος τελεστὴς τῆς L καὶ τὰ $\varphi_0, \ldots \varphi_{n-1}$ ἀνήκουν στὸ Δ.

Ὅταν ἑρμηνεύουμε μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L πρέπει νὰ λάβουμε ὑπόψη μας τὰ δυνατὰ πλαίσια χρήσης. Δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ τὰ θεωρήσουμε στὴν πλήρη τους πολυπλοκότητα· ἀντίθετα, μποροῦμε νὰ περιορίσουμε τὴν προσοχή μας σὲ ἐκεῖνα τὰ χαρακτηριστικά τους ποὺ ἔχουν σημασία γιὰ τὸ θέμα ποὺ ἐξετάζουμε. Ἔτσι, εἶναι ἀρκετὸ νὰ προσδιορίσουμε τὸ σύνολο ὅλων τῶν συνθέσεων σημαντικῶν ἀπόψεων γιὰ τὰ δυνατὰ πλαίσια χρήσης ποὺ ἔχουμε στὸ νοῦ. Αὐτὰ τὰ σύνθετα μποροῦμε νὰ τὰ ὀνομάσουμε *δεῖκτες* ἤ, γιὰ νὰ δανειστοῦμε τὸν ὅρο τοῦ Dana Scott, *σημεῖα ἀναφορᾶς*. Λόγου χάρη, ἂν τὸ μόνο ἐνδεικτικὸ χαρακτηριστικὸ τῆς L ἦταν τὸ ὅτι παρουσιάζονται τελεστὲς χρόνων, τότε τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς θὰ μποροῦσαν, κατὰ φυσικὸ τρόπο, νὰ ἐκλεγοῦν ὡς σημεῖα τοῦ χρόνου καὶ νὰ θεωρηθοῦν ὡς δυνατὲς στιγμὲς ἐκφώνησης. Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, ἂν ἡ L περιεῖχε καὶ τὸ πρῶτο πρόσωπο τῆς ἀντωνυμίας 'ἐγώ', ὅπως στὸ παρακάτω παράδειγμα, τότε δυὸ ἀπόψεις τοῦ χρηστικοῦ πλαισίου θὰ γίνονταν σημαντικές, ὁ ὁμιλητὴς καὶ ἡ στιγμὴ τῆς ἐκφώνησης· καὶ τὸ σημεῖο ἀναφορᾶς θὰ μποροῦσε φυσικὰ νὰ ἐπιλεγεῖ ὡς ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ποὺ θὰ ἀποτελοῦνταν ἀπὸ ἕνα ἄτομο καὶ μιὰ χρονικὴ στιγμή.

Ἕνα ἄλλο εἶδος πληροφορίας ποὺ πρέπει νὰ δίνουμε ὅταν ἑρμηνεύουμε τὴν L εἶναι ἡ *ἔνταση* (ἢ τὸ νόημα) κάθε κατηγορήματος τῆς L. Γιὰ νὰ τὸ κάνουμε αὐτὸ γιὰ τὸ κατηγόρημα P, θὰ πρέπει νὰ καθορίσουμε γιὰ κάθε σημεῖο ἀναφορᾶς i, τὴν *ἔκταση* (ἢ ὑποδήλωση) τοῦ P σχετικὰ μὲ τὸ i. Λ.χ., ἂν τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς εἶναι χρονικὲς στιγμὲς καὶ τὸ P εἶναι τὸ μονοθέσιο κατηγόρημα «εἶναι πράσινος», θὰ ἔπρεπε νὰ προσδιορίσουμε γιὰ κάθε στιγμὴ i τὸ σύνολο τῶν ἀντικειμένων ποὺ μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν πράσινα τὴ στιγμὴ i· ἂν τὸ P εἶναι τὸ διθέσιο κατηγόρημα «εἶναι παντρεμένος μὲ» θὰ ἔπρεπε νὰ προσδιορίσουμε, γιὰ κάθε στιγμὴ i, τὸ σύνολο τῶν διαταγμένων ζευγῶν ⟨x, y⟩ τέτοιων ὥστε τὸ x καὶ τὸ y πρέπει νὰ θεωροῦνται παντρεμένοι τὴ στιγμὴ i.

Ἕνα τρίτο εἶδος πληροφορίας ποὺ πρέπει νὰ δοθεῖ εἶναι ἡ ἔνταση ποὺ ἔχουμε κατὰ νοῦ γιὰ κάθε σύμβολο τελεστῆ τῆς L. Αὐτὸ μπορεῖ νὰ γίνει, ὅπως καὶ στὴν περίπτωση τῶν κατηγορημάτων, ἂν προσδιορίσουμε, γιὰ κάθε σημεῖο ἀναφορᾶς i, τὴν ἔκταση ποὺ ἔχουμε κατὰ νοῦ γιὰ τὸ σύμβολο τελεστῆ σχετικὰ μὲ τὸ i. Γιὰ παράδειγμα, ἂν τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς εἶναι πάλι χρονικὰ σημεῖα καὶ θεωρήσουμε τὸ μοναδιαῖο τελεστὴ «ἡ γυναίκα τοῦ», θὰ πρέπει νὰ προσδιορίσουμε γιὰ κάθε στιγμὴ i τὴ συνάρτηση ποὺ ἀντιστοιχίζει σὲ κάθε παντρεμένο ἄντρα τὸν ἄνθρωπο ποὺ πρέπει νὰ θεωρηθεῖ ὡς ἡ γυναίκα του τὴ στιγμὴ i (καὶ σὲ κάθε ἄλλο ἀντικείμενο ποὺ συναντᾶμε μιὰν αὐθαίρετα διαλεγμένη 'μηδενικὴ ὀντότητα')· ἐνῶ ἂν θεωρήσουμε τὸ σύμβολο πράξης μὲ 0 θέσεις (ἢ *ἐπιμέρους σταθερὰ*) «ὁ ἀμερικανὸς πρόεδρος», θὰ πρέπει νὰ προσδιορίσουμε γιὰ κάθε στιγμὴ i τὸ ἄτομο ποὺ πρέπει νὰ θεωρηθεῖ ὡς ὁ πρόεδρος τὴ στιγμὴ i.

Τὸ τέταρτο εἶδος πληροφορίας ποὺ πρέπει νὰ δοθεῖ εἶναι μιὰ ἑρμηνεία τῶν τελεστῶν τῆς L. Γιὰ νὰ τὴ δώσουμε, συνδέουμε μὲ κάθε n-θέσιο τελεστὴ τῆς L καὶ κάθε σημεῖο ἀναφορᾶς i, ὡς ἔκταση τοῦ τελεστῆ σχετικὰ μὲ τὸ i, μιὰ n-θέσια σχέση ἀνάμεσα σὲ ὁμάδες σημείων ἀναφορᾶς. Εἶναι αὐτὸς ὁ γενικὸς τρόπος ἑρμηνείας τῶν τελεστῶν, μαζὶ μὲ τὴν ἀντίστοιχη συνθήκη[5] τοῦ ὁρισμοῦ IV ποὺ θὰ δοθεῖ πιὸ κάτω, ποὺ ἐπεξεργαστήκαμε ὁ Howard κι ἐγὼ τὸ 1965· τὸ κίνητρο γι' αὐτὴ τὴν ἑρμηνεία θὰ γίνει ἴσως σαφέστερο ἀργότερα, ὅταν δοθοῦν παραδείγματα.

Τέλος, πρέπει νὰ προσδιορίσουμε, ὅταν ἑρμηνεύουμε τὴν L, τὸ σύνολο τῶν *δυνατῶν ἀντικειμένων* γιὰ τὴν ἐξέταση. (Στὴν περίπτωση τῆς λογικῆς τῶν χρόνων, αὐτὰ θὰ μποροῦσαν νὰ περιέχουν τουλάχιστον ὅλα τὰ ἀντικείμενα ποὺ ὑπάρχουν στὸ παρελθόν, τὸ παρὸν ἢ τὸ μέλλον.)

Οἱ προηγούμενες εὑρετικὲς παρατηρήσεις ὁδηγοῦν φυσικὰ στὸν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Ὁρισμὸς I. Μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία γιὰ μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L εἶναι μιὰ διαταγμένη τριάδα ⟨I, U, F⟩ τέτοια ὥστε (1) τὰ I καὶ U εἶναι σύνολα, (2) τὸ F εἶναι μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο τὴν L, (3) γιὰ κάθε σύμβολο A τῆς L, ἡ F_A εἶναι μιὰ συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ I, (4) κάθε φορὰ ποὺ τὸ P εἶναι ἕνα κατηγόρημα n-θέσεων τῆς L καὶ τὸ i ἀνήκει στὸ I, ἡ F_P (i) εἶναι μιὰ σχέση n *θέσεων πάνω στὸ* U (δηλαδή, ἕνα σύνολο διατεταγμένων νυάδων μελῶν τοῦ U), (5) κάθε φορὰ ποὺ τὸ A εἶναι ἕνα σύμβολο πράξης n-θέσεων τῆς L καὶ τὸ i ἀνήκει στὸ I, ἡ F_A (i) εἶναι μιὰ σχέση (n + 1)-θέσεων πάνω στὸ U τέτοια ὥστε, γιὰ ὅλα τὰ $x_0, \ldots x_{n-1}$ στὸ U, ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνα ἀντικείμενο y τοῦ U τέτοιο ὥστε τὸ $\langle x_0, \ldots x_{n-1}, y\rangle$ νὰ ἀνήκει στὸ F_A (i) καὶ (6) κάθε φορὰ ποὺ τὸ N εἶναι τελεστὴς n-θέσεων τῆς L καὶ τὸ i ἀνήκει στὸ I, τὸ F_N (i) εἶναι μιὰ n-μελὴς σχέση πάνω στὸ σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ I.

Χρειάζονται μερικὲς παρατηρήσεις. Χρησιμοποιῶ τοὺς συμβολισμοὺς 'F_P' καὶ '$F(P)$' μὲ τρόπο ποὺ ὁ ἕνας μπορεῖ νὰ ἀντικαθιστᾶ τὸν ἄλλο γιὰ τὴν τιμὴ τῆς συνάρτησης· αὐτὸ εἶναι βολικὸ ὅταν, ὅπως παραπάνω, ἡ τιμὴ τῆς συνάρτησης εἶναι ἡ ἴδια μιὰ συνάρτηση. Οἱ πεπερασμένες ἀκολουθίες (ἢ νυάδες) ὑποδείχνονται μὲ τὴ βοήθεια τῶν ἀγκυλωτῶν παρενθέσεων· λ.χ., $\langle x \rangle$ συμβολίζει τὴν 1-άδα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ x. Τὸ σύνολο I στὸν παραπάνω ὁρισμὸ εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν *σημείων ἀναφορᾶς* τῆς ἑρμηνείας $\langle I, U, F \rangle$. Ἂν τὸ i εἶναι ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς καὶ τὸ ὑποδηλούμενο κατηγόρημα E ἀνήκει στὴν L, τότε τὰ ἀντικείμενα x τέτοια ὥστε $\langle x \rangle \in F_E(i)$ τὰ ἀντιλαμβανόμαστε ὡς τὰ ἀντικείμενα ποὺ ὑπάρχουν σχετικὰ μὲ τὸ i (σύμφωνα μὲ τὴν $\langle I, U, F \rangle$). Τὸ σύνολο U στὸν παραπάνω ὁρισμὸ θεωρεῖται ὡς τὸ σύνολο ὅλων τῶν *δυνατῶν ἀντικειμένων* (ἢ *δυνατῶν ἐπιμέρους*) *τῆς* $\langle I, U, F \rangle$· δὲν ἀπαιτοῦμε κάθε δυνατὸ ἀντικείμενο νὰ ὑπάρχει σχετικὰ μὲ ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς, ἂν καὶ αὐτὴ ἡ πρόσθετη συνθήκη ὄντως θὰ ἰσχύει σὲ πολλὲς εἰδικὲς περιπτώσεις. Στὶς συνθῆκες (4) καὶ (5) ἀπαιτοῦμε ἡ ἔκταση ἑνὸς κατηγορήματος ἢ τελεστικοῦ συμβόλου νὰ εἶναι πάντα μιὰ σχέση ἀνάμεσα, ἢ συνάρτηση πάνω, σὲ *δυνατὰ* ἀντικείμενα. Γιὰ νὰ δοῦμε πὼς θὰ ἦταν ὑπερβολικὸς περιορισμὸς νὰ ἀπαιτήσουμε γενικὰ ἡ ἔκταση σχετικὰ μὲ ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς νὰ εἶναι μιὰ σχέση ἀνάμεσα σὲ ἀντικείμενα ποὺ ὑπάρχουν σὲ σχέση μὲ αὐτὸ τὸ σημεῖο ἀναφορᾶς ἢ μιὰ συνάρτηση τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ γιὰ τέτοια ἀντικείμενα θὰ εἶναι πάλι ἕνα τέτοιο ἀντικείμενο, ἂς ὑποθέσουμε πὼς τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς εἶναι χρονικὰ σημεῖα, καὶ ἂς θεωρήσουμε τὸ μοναδιαῖο κατηγόρημα «κάποιος τὸ θυμᾶται» καὶ τὸ μοναδιαῖο τελεστικὸ σύμβολο «ὁ πατέρας τοῦ».

2. *Νόημα καὶ ἀναφορά.* Τώρα θὰ εἰσαχθοῦν οἱ ἔννοιες τῆς ἔντασης καὶ τῆς ἔκτασης ὅπως ἐφαρμόζονται στοὺς ὅρους καὶ στοὺς τύπους· καὶ μ' αὐτὲς τὶς ἔννοιες θὰ χαρακτηρίσουμε τὴν ἀλήθεια, τὴ λογικὴ ἐγκυρότητα καὶ τὴ λογικὴ συνέπεια.

Ἕνας ὅρος θὰ περιέχει, γενικά, μεταβλητές. Ἡ ἔκτασή του, ἄρα, σ' ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς, θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H ποὺ ἀντιστοιχίζει σὲ κάθε δυνατὸ σύστημα τιμῶν αὐτῶν τῶν μεταβλητῶν τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ὅρου στὸ σημεῖο ἀναφορᾶς. Οἱ ὅροι μποροῦν νὰ περιέχουν διάφορους ἀριθμοὺς μεταβλητῶν, καὶ δὲν ὑπάρχει ἀνώτερο ὅριο στὸν ἀριθμό τους· γι' αὐτὸ εἶναι βολικὸ νὰ θεωρήσουμε πὼς ἡ H ἐφαρμόζεται ὄχι μόνο σὲ πεπερασμένες ἀλλὰ καὶ σὲ ἄπειρες ἀκολουθίες ἀπὸ δυνατὰ ἀντικείμενα[5]. Ἡ θέση στὴν ἀκολουθία θὰ ὑποδείχνει τὴν ἀντιστοιχία ποὺ ἔχουμε στὸ νοῦ ἀνάμεσα στὰ ἀντικείμενα καὶ στὶς μεταβλητές· μὲ ἄλλα λόγια, σὲ μιὰν ἄπειρη ἀκολουθία x ὁ *νυοστὸς* συστατικὸς ὅρος x_n θὰ θεωρεῖται ὡς ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς v_n.

Ὁρισμὸς II. Ἂς ὑποθέσουμε πὼς τὸ A ἀποτελεῖ μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία γιὰ μιὰ πραγματικὴ γλώσσα L, $A = \langle I, U, F \rangle$ καὶ πὼς τὸ i ἀνήκει στὸ I. Τότε εἰσάγουμε τὴν *ἔκταση* τοῦ ζ στὸ i (σύμφωνα μὲ τὴν A), συμβολικὰ $\text{Εκτ}_{i,A}(\zeta)$, γιὰ ἕνα αὐθαίρετο ὅρο ζ τῆς L, μὲ τὸν ἀκόλουθο ἀναδρομικὸ ὁρισμό.

(1) Ἡ $\text{Εκτ}_{\,i,\,A}(v_n)$ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H ποὺ ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ της τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν δυνατῶν ἀντικειμένων τοῦ **A**, καὶ εἶναι τέτοια ὥστε ἂν τὸ x εἶναι μιὰ τέτοια ἀκολουθία, $H(x) = x_n$.

(2) Ἂν τὸ A εἶναι ἕνα τελεστικὸ σύμβολο n θέσεων στὴν L καὶ $\zeta_0, \ldots \zeta_{n-1}$ εἶναι ὅροι τῆς L, τότε $\text{Εκτ}_{\,i,\,A}(A\zeta_0, \ldots \zeta_{n-1})$ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H ποὺ ἔχει ὡς πεδίο της τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν δυνατῶν ἀντικειμένων τοῦ **A**, καὶ εἶναι τέτοια ὥστε ἂν x εἶναι μιὰ τέτοια ἀκολουθία, τὸ H(x) νὰ εἶναι τὸ μοναδικὸ ἀντικείμενο γιὰ τὸ ὁποῖο $\langle \text{Εκτ}_{\,i,\,A}(\zeta_{n-1})(x), \ldots, \text{Εκτ}_{\,i,\,A}(\zeta_{n-1})(x), y\rangle$ εἶναι μέλος τῆς $F_A(i)$.

Ὁρισμὸς III. Ἂς ὑποθέσουμε πὼς **A** εἶναι μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία γιὰ τὴν πραγματολογικὴ γλώσσα L, **A** = ⟨I, U, F⟩, καὶ ζ ἕνας ὅρος τῆς L. Τότε $\text{Int}_A(\zeta)$, ἢ ἡ *ἔνταση* τοῦ ζ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ I τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε i τοῦ I

$$H(i) = \text{Εκτ}_{\,i,\,A}(\zeta).$$

Καὶ ἀφοῦ ἕνας τύπος, γενικά, περιέχει ἐλεύθερες μεταβλητές, ἡ ἔκτασή του σ' ἕνα δοσμένο σημεῖο ἀναφορᾶς πρέπει συνεπῶς νὰ εἶναι τὸ σύνολο ἐκείνων τῶν συστημάτων τιμῶν γιὰ τὶς ἐλεύθερες μεταβλητὲς τὸ ὁποῖο τὸν ἱκανοποιεῖ. Ὅπως καὶ γιὰ τοὺς ὅρους, εἶναι βολικὸ νὰ θεωροῦμε πὼς οἱ τιμὲς τῶν μεταβλητῶν δίνονται ἀπὸ *ἄπειρες* ἀκολουθίες δυνατῶν ἀντικειμένων. Ἀλλὰ δὲν μποροῦμε νὰ εἰσαγάγουμε τὶς ἐκτάσεις τῶν τύπων, ὅπως κάναμε γιὰ τὶς ἐκτάσεις τῶν ὅρων, μὲ τὴν ἁπλὴ ἀναδρομὴ πάνω στὴ δομὴ τῶν ἐκφράσεων. Ὅπως παρατήρησε ὁ Frege [13], ἡ ἔκταση ἑνὸς τύπου ποὺ περιέχει τελεστὲς θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὶς ἐντάσεις μᾶλλον παρὰ ἀπὸ τὶς ἐκτάσεις ὁρισμένων ἀπὸ τὰ μέρη του. Ἑπομένως, πρῶτα εἰσάγουμε τὶς *ἐντάσεις* τῶν τύπων, καὶ ἀναφορικὰ μ' αὐτές, εἶναι δυνατὴ ἡ ἁπλὴ ἀναδρομή.

Ὁρισμὸς IV. Ἔστω **A** μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία τῆς L καὶ **A** = ⟨I, U, F⟩. Τότε ἡ $\text{Int}_A(\varphi)$ εἰσάγεται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο γιὰ ἕναν αὐθαίρετο τύπο φ.

(1) Ἂν ζ καὶ η εἶναι ὅροι τῆς L, τότε ἡ $\text{Int}_A(\zeta = \eta)$ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H μὲ πεδίο I τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε i τοῦ I, ἡ H(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν x ἀπὸ μέλη τοῦ U γιὰ τὶς ὁποῖες $\text{Εκτ}_{\,i,A}(\zeta)(x)$ συμπίπτει μὲ $\text{Εκτ}_{\,i,A}(\eta)(x)$.

(2) Ἂν τὸ P εἶναι ἕνα κατηγόρημα n θέσεων τῆς L καὶ $\zeta_0, \ldots \zeta_{n-1}$ εἶναι ὅροι τῆς L, τότε ἡ $\text{Int}_A(P\zeta_0, \ldots \zeta_{n-1})$ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H μὲ πεδίο τὸ I γιὰ τὴν ὁποία, γιὰ κάθε i τοῦ I, τὸ H(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν x ἀπὸ μέλη τοῦ U γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ $\langle \text{Εκτ}_{\,i,A}(\zeta_0)(x), \ldots \text{Εκτ}_{\,i,A}(\zeta_{n-1})(x)\rangle$ εἶναι μέλος τῆς $F_P(i)$.

(3) Ἂν ὁ φ εἶναι ἕνας τύπος τῆς L, τότε ἡ $\text{Int}_A(\neg\varphi)$ εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H μὲ πεδίο I γιὰ τὴν ὁποία, γιὰ κάθε i τοῦ I, H(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν x μελῶν τοῦ U γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ x δὲν εἶναι στὴν $\text{Int}_A(\varphi)(i)$. Καὶ παρόμοια γιὰ τὰ ἄλλα προτασιακὰ συνδετικά.

(4) Ἂν ὁ φ εἶναι ἕνας τύπος τῆς L, τότε ἡ $\text{Int}_A(\forall u_n \varphi)$ εἶναι μιὰ συνάρ-

τηση H μὲ πεδίο I γιὰ τὴν ὁποία, γιὰ κάθε i τοῦ I, τὸ H(i) εἶναι τὸ σύνολο ἄπειρων ἀκολουθιῶν x ἀπὸ μέλη τοῦ U γιὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει ἕνα y στὸ U τέτοιο ὥστε ἡ ἄπειρη ἀκολουθία $\langle x_0, \ldots x_{n-1}, y, x_{n+1}, \ldots \rangle$ εἶναι στὴν Int_A (φ) (i). Τὸ ἴδιο ὁρίζεται γιὰ τὸ Λu_n φ.

(5) Ἂν ὁ N εἶναι ἕνας τελεστὴς n θέσεων τῆς L καὶ $\varphi_0, \ldots, \varphi_{n-1}$ εἶναι τύποι τῆς L, τότε ἡ Int_A ($N\varphi_0, \ldots \varphi_{n-1}$) εἶναι ἐκείνη ἡ συνάρτηση H μὲ πεδίο τὸ I, γιὰ τὴν ὁποία, γιὰ κάθε i τοῦ I, τὸ H(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν x μελῶν τοῦ U τέτοιων ὥστε τὸ $\langle \zeta_0, \ldots, \zeta_{n-1} \rangle$ ἀνήκει στὸ F_N (i), ὅπου, γιὰ κάθε $\kappa < n$ ὁ ζ_κ εἶναι τὸ σύνολο τῶν μελῶν j τοῦ I γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ x εἶναι μέλος τῆς Int_A (φ_κ) (j).

Ὁρισμὸς V. Ἔστω **A** μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία τῆς πραγματολογικῆς γλώσσας L, i ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς **A**, καὶ φ ἕνας τύπος τῆς L. Τότε ἡ $\mathrm{E\kappa\tau}_{i,A}$ (φ) — ἤ, ἡ ἔκταση τοῦ φ στὸ i κάτω ἀπὸ τὸ **A**—, εἶναι ἡ Int_A (φ) (i).

Ἂν τὸ φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση (δηλαδὴ ἕνας τύπος χωρὶς ἐλεύθερες μεταβλητές), τότε ἡ ἔκταση τοῦ φ θὰ εἶναι πάντα ἢ τὸ κενὸ σύνολο ἢ τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν δυνατῶν ἀντικειμένων. Αὐτὴ ἡ παρατήρηση βρίσκεται πίσω ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ἀλήθειας ποὺ θὰ δώσουμε ἀμέσως πιὸ κάτω[6].

Ὁρισμὸς VI. Ἂν ἡ **A** εἶναι μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία τῆς L, i εἶναι ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς **A**, καὶ φ εἶναι μιὰ *ἀπόφανση* τῆς L, τότε ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A** τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ $\mathrm{E\kappa\tau}_{i,A}$ (φ) εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν ἄπειρων ἀκολουθιῶν δυνατῶν ἀντικειμένων τοῦ **A**.

Γιὰ νὰ διασαφηνίσω τὸ σκοπὸ αὐτῶν τῶν ὁρισμῶν θὰ δώσω μερικὰ ἀπὸ τὰ ἄμεσα συνακόλουθά τους γιὰ τὴν ἔννοια τῆς ἀλήθειας.

Παρατήρηση. Ἔστω **A** μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία ποὺ ἔχει τὴ μορφὴ ⟨I, U, F⟩, γιὰ τὴν πραγματολογικὴ γλώσσα L· ἔστω ὅτι τὸ i ἀνήκει στὸ I· ἔστω ὅτι u εἶναι μιὰ μεταβλητή· ἔστω ὅτι τὸ P εἶναι ἕνα κατηγόρημα μιᾶς θέσης· καὶ ἔστω ὅτι τὰ c καὶ d εἶναι σύμβολα τελεστῶν μηδὲν θέσεων. Τότε:

(1) Pc εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A** τότε καὶ μόνο τότε ἂν τὸ $\langle F_c$ (i) (Λ)⟩ εἶναι στὸ F_p (i)[7].

(2) c = d εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὸ **A** τότε καὶ μόνο τότε ἂν F_c (i) (Λ) συμπίπτει μὲ F_d (i) (Λ)·

(3) ἂν φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, τότε φ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A** τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ φ δὲν εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A**.

(4) ἂν φ καὶ ψ εἶναι ἀποφάνσεις τῆς L, τότε ἡ (φ ∧ ψ) εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A** τότε καὶ μόνο τότε ἂν καὶ οἱ δύο φ καὶ ψ εἶναι ἀληθεῖς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A**·

(5) VuPu εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ **A** τότε καὶ μόνο ἂν ὑπάρχει ἕνα ἀντικείμενο x στὸ U τέτοιο ὥστε ἡ ⟨x⟩ νὰ ἀνήκει στὸ F_P (i)·

(6) ἂν N εἶναι ἕνας τελεστὴς μιᾶς θέσης στὴν L καὶ φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, τότε ἡ Nφ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ A, τότε καὶ μόνο τότε ἂν τὸ ⟨J⟩ ἀνήκει στὸ F_N (i), ὅπου τὸ J εἶναι τὸ σύνολο τῶν μελῶν τοῦ I στὰ ὁποῖα ἡ φ εἶναι ἀληθὴς (κάτω ἀπὸ τὴν A).

Σύμφωνα μὲ τὴν (5) πιὸ πάνω, ἡ ποσοδειχτοποίηση εἶναι σχετικὴ μὲ *δυνατὰ* ἀντικείμενα (καὶ ὄχι μόνο πάνω σὲ *πραγματικὰ* ἢ ὑπάρχοντα ἀντικείμενα). Τὸ ὅτι αὐτὸ εἶναι ἐπιθυμητέο μποροῦμε νὰ τὸ δοῦμε ἂν ἐξετάσουμε, στὴν εἰδικὴ περίπτωση τῆς λογικῆς τῶν χρόνων, τὴν ἀπόφανση «ὑπῆρξε ἕνας ἄνθρωπος ποὺ κανένας δὲν τὸν θυμᾶται». Ἡ ποσοδειχτοποίηση πάνω σὲ πραγματικὰ ἐπιμέρους μπορεῖ βέβαια καὶ νὰ ἐκφραστεῖ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ κατηγορήματος γιὰ τὴν ὕπαρξη ποὺ ὑποδηλώνεται μὲ E· λ.χ., ἡ *ὑπαρκτικὴ* ἀπόφανση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀπόφανση (5) εἶναι

$$\mathrm{Vu}(\mathrm{Eu} \wedge \mathrm{Pu}).$$

Ὁρισμὸς VII. Λέμε ὅτι φ εἶναι *λογικὴ συνέπεια* ἑνὸς συνόλου Γ (μὲ τὴν ἔννοια τῆς γενικῆς πραγματολογίας) τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L τέτοια ὥστε ἡ φ καὶ ὅλα τὰ μέλη τοῦ Γ εἶναι ἀποφάνσεις τῆς L, καὶ γιὰ κάθε δυνατὴ ἑρμηνεία **A** τῆς L καὶ κάθε σημεῖο ἀναφορᾶς i τοῦ **A**, ἂν ὅλα τὰ μέλη τοῦ Γ εἶναι ἀληθῆ στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A**, τότε ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A**· καὶ ἡ φ εἶναι λογικὰ ἔγκυρη (πάλι μὲ τὴν ἔννοια τῆς γενικῆς πραγματολογίας) τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ φ εἶναι μιὰ λογικὴ συνέπεια τοῦ κενοῦ συνόλου (δηλαδή, τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L στὴν ὁποία ἡ φ εἶναι πρόταση καὶ τέτοια ὥστε ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν **A**, κάθε φορὰ ποὺ ἡ **A** εἶναι μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία τῆς L καὶ τὸ i ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς **A**).

Εἶναι εὔκολο νὰ δεῖ κανεὶς πὼς ἂν ἡ φ καὶ τὰ μέλη τοῦ Γ εἶναι ἀποφάνσεις (κάποιας πραγματολογικῆς γλώσσας), τότε ἡ φ εἶναι μιὰ λογικὴ συνέπεια τοῦ Γ τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει μιὰ σύζευξη ψ τῶν μελῶν τοῦ Γ τέτοια ὥστε ἡ (ψ → φ) εἶναι λογικὰ ἔγκυρη. Εἶναι ἐπίσης φανερό, ἐξαιτίας γνωστῶν ἀποτελεσμάτων, πὼς τὸ σύνολο τῶν λογικὰ ἔγκυρων ἀποφάνσεων μιᾶς ἀναδρομικῆς γλώσσας μπορεῖ νὰ ἀξιωματοποιηθεῖ ἀναδρομικὰ (κάτω ἀπὸ ἕναν πεπερασμένο ἀριθμὸ κανόνων συνεπαγωγῆς). Τὸ νὰ δείξουμε ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων γι' αὐτὸ τὸ σύνολο εἶναι, ὡστόσο, ἕνα διαφορετικὸ καὶ πιὸ δύσκολο ζήτημα. Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ἔκανε ὁ καθηγητὴς David Kaplan σὲ πρόσφατη ἀδημοσίευτη ἐργασία του.

3. *Ἐξειδικεύσεις*. Ὅταν θεωρήσουμε εἰδικοὺς κλάδους ποὺ περιλαμβάνονται στὴν πραγματολογία — κλάδους ὅπως ἡ λογικὴ τῶν χρόνων, ἡ τροπικὴ λογική, ἡ λογικὴ τῶν προσωπικῶν ἀντωνυμιῶν — οἱ ἔννοιες τῆς λογικῆς ἐγκυρότητας καὶ τῆς συνέπειας ποὺ δόθηκαν στὸν ὁρισμὸ VII ἀπαιτοῦν ἐπεξεργασία γιὰ νὰ γίνουν καταλληλότερες. Λόγου χάρη, συχνὰ θὰ ἐνδιαφερθοῦμε, ὄχι γιὰ *ὅλες* τὶς δυνατὲς ἑρμηνεῖες μιᾶς δοσμένης γλώσσας L, ἀλλὰ μόνο γιὰ μιὰν ὁρισμένη κλάση K δυνατῶν ἑρμηνειῶν. Ἡ ἐπιλογὴ τῆς K θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὸν εἰδικὸ κλάδο ποὺ ἐξετάζουμε, καὶ τὰ μέλη τῆς K θὰ θεωρηθοῦν ὡς οἱ *τακτικὲς* (standard) ἑρμηνεῖες τῆς L μὲ τὴν ἔννοια αὐτοῦ τοῦ κλάδου. Οἱ ἀντίστοιχες σχετικοποιημένες ἔννοιες τῆς συνέπειας καὶ τῆς ἐγκυρότητας χαρακτηρίζονται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

Ὁρισμὸς VIII. Ἔστω K ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν τῆς πραγματολογικῆς γλώσσας L· καὶ ἔστω ὅτι ἡ φ καὶ τὰ μέλη τοῦ συνόλου Γ εἶναι ἀποφάνσεις τῆς L. Τότε ἡ φ εἶναι μία K-*συνέπεια* τοῦ Γ τότε καὶ μόνο τότε ἄν, γιὰ κάθε A στὴν K καὶ κάθε σημεῖο ἀναφορᾶς i τῆς A, ἂν ὅλα τὰ μέλη τῆς Γ εἶναι ἀληθῆ στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν A, τότε εἶναι ἀληθὴς καὶ ἡ φ στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν A. Καὶ ἡ φ εἶναι K-*ἔγκυρη* τότε καὶ μόνο ἂν ἡ φ εἶναι μία K-συνέπεια τοῦ κενοῦ συνόλου.

Σὲ μερικὲς καταστάσεις, μία ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἐπεξηγεῖται πιὸ κάτω, αὐτὸς ὁ βαθμὸς ἐξειδίκευσης δὲν θὰ ἐπαρκεῖ· καμιὰ φορὰ θὰ βροῦμε πὼς εἶναι ἀναγκαῖο νὰ περιορίσουμε τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς καὶ τὶς δυνατὲς ἑρμηνεῖες ποὺ πρέπει νὰ θεωρήσουμε. Ἡ κατασκευὴ τῶν ἀκριβῶν ἐννοιῶν, ποὺ συνεπάγεται τὴν ἀπόδοση σὲ κάθε τακτικὴ ἑρμηνεία ἑνὸς ὑποδειχνόμενου συνόλου ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἀναφορᾶς του (ποὺ θὰ θεωροῦνται ὅτι ἀποτελοῦν τὰ *τακτικὰ* σημεῖα τῆς ἀναφορᾶς), ὀφείλεται στοὺς μαθητές μου Δρ. J. A. Kamp καὶ κ. Perry Smith καὶ σὲ μένα τὸν ἴδιο.

Ὁρισμὸς IX. Ἔστω K μιὰ κλάση δυνατῶν ἑρμηνειῶν γιὰ μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L, ἔστω J μία συνάρτηση ποὺ ἀποδίνει σὲ κάθε μέλος A τοῦ K ἕνα σύνολο σημείων ἀναφορᾶς τοῦ A, καὶ ἔστω πὼς ἡ φ καὶ τὰ μέλη τοῦ Γ εἶναι ἀποφάνσεις τῆς L. Τότε ἡ φ εἶναι μία (K, J) — *συνέπεια* τοῦ Γ τότε καὶ μόνο τότε ἄν, γιὰ κάθε A τοῦ K καὶ κάθε i τοῦ J_A, ἂν ὅλα τὰ μέλη τοῦ Γ εἶναι ἀληθῆ στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν A, τότε τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὴν φ· καὶ ἡ φ εἶναι (K, J) — *ἔγκυρη* τότε καὶ μόνο ἂν ἡ φ εἶναι μία (K, J) — *συνέπεια* τοῦ κενοῦ συνόλου.

Ἡ ἀναγκαιότητα αὐτῶν τῶν ἐννοιῶν δείχτηκε ἀπὸ τὸν κ. Kamp: βρῆκε ἐνδιαφέροντα παραδείγματα τοῦ K καὶ τοῦ J γιὰ τὰ ὁποῖα ἀπέδειξε πὼς δὲν ὑπάρχει κλάση K′ τέτοια ὥστε τὸ σύνολο τῶν K′ — *ἔγκυρων* ἀποφάνσεων νὰ συμπίπτει μὲ τὸ σύνολο τῶν (K, J) — ἔγκυρων ἀποφάνσεων.

Τώρα, ἂς εἰσαγάγουμε μερικὲς εἰδικὲς κλάσεις δυνατῶν ἑρμηνειῶν· μ' αὐτὸ θὰ ὑποδείξουμε μερικοὺς ἀπὸ τοὺς εἰδικοὺς κλάδους τῆς πραγματολογίας.

Κοινὴ λογικὴ τῶν χρόνων. Ἔστω L μία πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει ὡς μοναδικούς της τελεστὲς τοὺς δύο μονοθέσιους τελεστὲς **P** καὶ **F** καὶ ἔστω K_1 (L) τὸ σύνολο τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν ⟨I, U, G⟩ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες ἰσχύουν: (1α) τὸ I εἶναι τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, (1β) γιὰ κάθε i στὸ I, τὸ G_P (i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων ⟨J⟩ τέτοιο ὥστε $J \subseteq I$ καὶ ὑπάρχει ἕνα j στὸ J τέτοιο ὥστε $j<i$, καὶ (1γ) γιὰ κάθε i στὸ I, τὸ G_F (i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκολουθιῶν μιᾶς θέσης ⟨J⟩ τέτοιων ὥστε $J \subseteq I$ καὶ ὑπάρχει j στὸ J τέτοιο ὥστε $i < j$.

Ἐδῶ θεωροῦμε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς ὡς τὶς χρονικὲς στιγμές. Ἂν ἰσχύουν οἱ (1α) — (1γ), ἡ φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, καὶ τὸ i εἶναι στὸ I, μποροῦμε εὔκολα νὰ δοῦμε ὅτι:

Pφ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ ⟨I, U, G⟩ τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει ἕνα j στὸ I τέτοιο ὥστε $j < i$ καὶ τὸ φ εἶναι ἀληθὲς στὸ j κάτω ἀπὸ τὴν ⟨I, U, G⟩, καὶ

Fφ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ ⟨I, U, G⟩ τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει ἕνα j στὸ I τέτοιο ὥστε $j > i$ καὶ ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ j κάτω ἀπὸ τὴν ⟨I, U, G⟩. Ἔτσι, εἶναι σωστὸ νὰ διαβάζουμε τὸ 'Pφ' ὡς «ἦταν ἡ περίπτωση ὅτι φ» καὶ τὸ 'Fφ' ὡς «θὰ εἶναι ἡ περίπτωση ὅτι φ». Οἱ K_1 (L) — ἔγκυρες ἀποφάνσεις τῆς L ἀποτελοῦν τὶς λογικὲς ἀλήθειες (τῆς L) τῆς κοινῆς χρονικῆς λογικῆς. Ὁ Dana Scott μοῦ ὑπέδειξε σὲ ἀλληλογραφία ὅτι ἂν ἡ L περιέχει τουλάχιστον ἕνα κατηγόρημα μιᾶς θέσης καὶ δύο σύμβολα τελεστῶν μὲ δύο θέσεις, τότε τὸ σύνολο τῶν K_1 (L) — ἔγκυρων προτάσεων τῆς L δὲν εἶναι ἀναδρομικὰ ἀπαριθμήσιμο (καὶ ἑπομένως δὲν μπορεῖ νὰ ἀξιωματοποιηθεῖ ἀναδρομικά). Ἔδειξε ἀκόμα πὼς κάτω ἀπὸ τὶς ἴδιες ὑποθέσεις γιὰ τὴν L (ποὺ ἀναμφισβήτητα μποροῦν νὰ γίνουν κάπως ἀσθενέστερες), τὸ *θεώρημα τοῦ συμπαγοῦς* δὲν ἰσχύει γιὰ τὸ K_1 (L)· αὐτὸ πάει νὰ πεῖ πὼς δὲν συμβαίνει κάθε φορὰ ποὺ μιὰ ἀπόφανση φ τῆς L εἶναι μιὰ K_1 (L) — συνέπεια ἑνὸς συνόλου ἀπὸ ἀποφάνσεις τῆς L, ἡ φ εἶναι ἐπίσης καὶ μιὰ K_1 (L) — συνέπεια κάποιου πεπερασμένου συνόλου τοῦ Γ.

Σύμφωνα μὲ τὶς ἑρμηνεῖες στὸ K_1 (L), ὁ χρόνος εἶναι συνεχής. Ἂν θέλαμε νὰ ἐπιβάλουμε τὴ συνθήκη ὁ χρόνος νὰ εἶναι διακριτὸς (discrete, ἀσυνεχής), θὰ μπορούσαμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὴ συνθήκη (1α) μὲ «I εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων (θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν)». Ὁ Dana Scott ἔδειξε πὼς τὰ ἀποτελέσματα ποὺ ἀναφέρθηκαν πιὸ πάνω ἰσχύουν καὶ σ' αὐτὴν τὴν περίπτωση.

Γενικευμένη χρονικὴ λογική. Ὡστόσο μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὴ δομὴ τοῦ χρόνου ὡς περιστασιακὴ καὶ ἑπομένως νὰ μὴν ἔχουμε τὴν τάση νὰ περιορίσουμε τὴν προσοχή μας σὲ κάποια ἰδιαίτερη χρονικὴ δομή. Ὅμως φαίνεται φυσικὸ νὰ ἐπιβάλουμε ὡς ἐλάχιστη ἀπαίτηση τὸ ὅτι ὁ χρόνος πρέπει νὰ ἔχει διάταξη. Ἂν τώρα ἡ L εἶναι μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει τὰ **P** καὶ **F** ὡς μόνους τελεστές, φτάνουμε σὲ μιὰν ἄλλη κλάση τακτικῶν ἑρμηνειῶν γιὰ τὴν L· μάλιστα, ἂς γράψουμε K_2 (L) γιὰ τὴν κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν ⟨I, U, G⟩ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχει μιὰ ἁπλὴ διάταξη[8] $\leqslant$ τοῦ I καὶ γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει: (2α) I εἶναι μὴ κενό, (2β) γιὰ κάθε i στὸ I, G_P (i) εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν 1-άδων ⟨J⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ i ἀνήκει στὸ I, $J \subseteq I$, καὶ ὑπάρχει j στὸ J τέτοιο ὥστε $j \leqslant i$ καὶ $j \neq i$ καὶ (2γ) γιὰ κάθε i τοῦ I, G_F (i) εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν 1-άδων ⟨J⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ i ἀνήκει στὸ I, $J \subseteq I$, καὶ ὑπάρχει j στὸ J τέτοιο ὥστε $i \leqslant j$ καὶ $i \neq j$. Ἔτσι ἔχουμε τὴ χρονικὴ λογικὴ τοῦ Nino Cocchiarella. Εἶναι εὔκολο νὰ δεῖ κανεὶς (καὶ τὸ παρατήρησε ὁ Cocchiarella) ὅτι γιὰ τὸ K_2 (L) ἰσχύει τὸ θεώρημα τοῦ συμπαγοῦς. Ἀκόμη, ὁ Cocchiarella [14, 15] ἔδωσε μιὰ κομψὴ ἀξιωματοποίηση τῶν K_2 (L) — ἔγκυρων ἀποφάνσεων τῆς L.

Προσωπικὲς ἀντωνυμίες καὶ δεικτικά. Ἔστω L μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα χωρὶς τελεστὲς ποὺ ἔχει ἕνα ξεχωριστὸ σύμβολο πράξης 0 - θέσεων, τὸ c. Ἔστω K_3 (L) μιὰ κλάση δυνατῶν ἑρμηνειῶν ⟨I, U, G⟩ τῆς L τέτοιων ὥστε (3α) G_A (i) καὶ G_A (j) γιὰ ὅλα τὰ σύμβολα A τῆς L ποὺ διαφέρουν ἀπὸ τὸ c καὶ γιὰ ὅλα τὰ i καὶ j τοῦ I, καὶ (3β) τὸ G_c (i) εἶναι τὸ {⟨i⟩} (δηλαδή, τὸ μοναδιαῖο σύνολο εἶναι ἡ 1-ὰς τοῦ ι), γιὰ κάθε i στὸ I. Ἂν αὐτὲς οἱ συνθῆκες ἱκανοποιοῦνται, καὶ ἂν τὸ P εἶναι ἕνα κατηγόρημα μιᾶς θέσης, καὶ τὰ i εἶναι στοιχεῖα τοῦ I, εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε πὼς ἡ Pc εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὴν ⟨I, U, G⟩ τότε καὶ μόνο τότε ἂν ⟨i⟩ ἀνήκει στὸ G_P (j). Ἔτσι ἂν τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς εἶναι δυνατοὶ ὁμιλητές, τὸ c ἀναπαριστάνει τὸ πρῶτο πρόσωπο τῆς ἀντωνυμίας 'ἐγώ'. Ἂν τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς θεωρηθοῦν ὡς οἱ ἄνθρωποι στοὺς ὁποίους ἀπευθύνονται οἱ ρήσεις, τὸ c θὰ ἀναπαριστάνει τὸ δεύτερο πρόσωπο τῆς ἀντωνυμίας 'ἐσύ'. Ἄλλοι τρόποι νὰ παίρνουμε τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς προικίζουν τὸ c μὲ τὸ νόημα τῶν δεικτικῶν ἀντωνυμιῶν 'αὐτός' ἢ 'αὐτό'. Δὲν θὰ ἦταν παράλογο νὰ ἐπιβάλουμε στὰ μέλη τοῦ K_3 (L) τὴν πρόσθετη συνθήκη ὅτι τὸ ⟨i⟩ πρέπει νὰ ἀνήκει στὸ G_E (L) γιὰ κάθε i τοῦ I· ἂν γινόταν αὐτό, ἀλλὰ μόνο τότε, ἡ ἀπόφανση Ec (λ.χ., «Ἐγὼ ὑπάρχω») θὰ ἦταν ἔγκυρη. Ἡ διευθέτηση τῆς περίπτωσης περισσότερων δεικτικῶν καὶ προσωπικῶν ἀντωνυμιῶν συγχρόνως δὲν παρουσιάζει προβλήματα: θὰ πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουμε διάφορες ξεχωριστὲς ἐπιμέρους σταθερὲς καὶ νὰ πάρουμε ἀκολουθίες ἀντίστοιχου μήκους (ποὺ θὰ θεωροῦμε λ.χ. ὡς συνθεμένες ἀπὸ τὸν ὁμιλητή, τὸ ἄτομο στὸ ὁποῖο ἀπευθύνεται καὶ τὸ ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο δείχνει ὁ ὁμιλητὴς) ὡς σημεῖα ἀναφορᾶς.

Γιὰ νὰ ἐπεξηγήσουμε μὲ περισσότερη λεπτομέρεια τὴ διευθέτηση διαφόρων δεικτολογικῶν γνωρισμάτων σὲ μιὰ γλώσσα, ἂς θεωρήσουμε τὸ *συνδυασμὸ τῶν χρόνων μὲ τὸ πρῶτο ἑνικὸ πρόσωπο*. Ἂν τὰ I, J, U εἶναι σύνολα, ἡ $\leqslant$ μιὰ ἁπλὴ διάταξη τοῦ I, καὶ γιὰ κάθε i τοῦ I, $A_i = \langle J, U, G_i \rangle$ καὶ A_i εἶναι μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία γιὰ μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα L ποὺ δὲν περιέχει τοὺς τελεστὲς **P** καὶ **F**, τότε τὸ $\leqslant$ — *γινόμενο* τῶν συστημάτων A_i (γιὰ i στὸ I) εἶναι ἡ δυνατὴ ἐκείνη ἑρμηνεία ⟨K, U, H⟩ γιὰ τὸ L $\cup$ {**P**, **F**} γιὰ τὴν ὁποία: (1) τὸ K εἶναι τὸ σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ⟨i, j⟩ μὲ i στὸ I καὶ j στὸ J, (2) γιὰ κάθε i στὸ I, κάθε j στὸ J καὶ κάθε κατηγόρημα ἢ σύμβολο τελεστῆ A τῆς L, $H_A(\langle i, j\rangle) = (G_i)_A(j)$, (3) κάθε φορὰ ποὺ τὸ i εἶναι στὸ I, τὸ j στὸ J, καὶ τὸ N εἶναι ἕνας τελεστὴς μὲ n θέσεις τῆς L, $H_N(\langle i, j\rangle)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν νυάδων $(X_0, \ldots X_{n-1})$ γιὰ τὶς ὁποῖες τὰ $X_0, \ldots X_{n-1}$ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ K καὶ $(Y_0, \ldots Y_{n-1})$ ἀνήκει στὸ $(G_i)_N(j)$ ὅπου, γιὰ κάθε $k < n$, Y_k εἶναι τὸ σύνολο τῶν j′ τοῦ J γιὰ τὰ ὁποῖα ⟨i, j′⟩ ἀνήκει στὸ X_k, (4) γιὰ κάθε i τοῦ I καὶ j, $H_{\mathbf{P}}(\langle i, j\rangle)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων ⟨X⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες $X \subseteq K$ καὶ ὑπάρχει i′ στὸ I τέτοιο ὥστε $i' \leqslant i$, $i' \neq i$ καὶ τὸ ⟨i′, j⟩ ἀνήκει στὸ X, καὶ (5) γιὰ κάθε i τοῦ I καὶ j τοῦ J, $H_{\mathbf{F}}(\langle i, j\rangle)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων ⟨X⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες $X \subseteq K$ καὶ ὑπάρχει i′ στὸ I τέτοιο ὥστε $i \leqslant i'$, $i \neq i'$ καὶ ⟨i′, j⟩ εἶναι στὸ X.

Τώρα, ἔστω L μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ περιέχει τοὺς τελεστὲς **P** καὶ **F**, μαζὶ μὲ τὸ ἐπιμέρους τελεστικὸ σύμβολο 0—θέσεων c ποὺ ἀναφέραμε πιὸ πάνω· καὶ ἔστω ὅτι K_4 (L) ἡ τάξη τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν **B** τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχουν σύνολα I, J, U, δυνατὲς ἑρμηνεῖες A_i στὸ K_3 (L—[**P**, **F**]) (γιὰ i στὸ I), καὶ μιὰ ἁπλὴ διάταξη $\leqslant$ τοῦ I τέτοια ὥστε τὸ J εἶναι τὸ σύνολο τῶν σημείων ἀναφορᾶς καὶ U τὸ σύνολο τῶν δυνατῶν ἐπιμέρους τοῦ A_i (γιὰ ὅλα τὰ i τοῦ I), καὶ **B** εἶναι τὸ $\leqslant$—γινόμενο τῶν ἑρμηνειῶν A_i (γιὰ i ἐν I). Ἂν αὐτὲς οἱ συνθῆκες ἱκανοποιοῦνται, ἡ φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, καὶ τὸ $\langle i, j\rangle$ εἶναι ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τῆς **B**, τότε εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε πὼς ἡ **P**φ εἶναι ἀληθὴς στὸ $\langle i, j\rangle$ κάτω ἀπὸ τὴ **B** τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει ἕνα i′ τοῦ I τέτοιο ὥστε $i' \leqslant i$ καὶ $i' \neq i$ καὶ ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ $\langle i', j\rangle$ κάτω ἀπὸ τὴ **B**· ἄν, ἐπιπρόσθετα, τὸ P εἶναι ἕνα κατηγόρημα μιᾶς θέσης τῆς L, τότε ἡ Pc εἶναι ἀληθὴς στὸ $\langle i, j\rangle$ κάτω ἀπὸ τὴ **B** τότε καὶ μόνο τότε ἂν τὸ $\langle j\rangle$ ἀνήκει στὸ $H_P(\langle i, j\rangle)$· καὶ ἂν j′ εἶναι ὁποιοδήποτε μέλος τῆς J, τότε $H_P(\langle i, j\rangle) = H_P(\langle i, j'\rangle)$.

Ἔτσι ἡ **P** συμπεριφέρεται ἀκριβῶς ὅπως θὰ ἔκανε ὁ τελεστὴς τοῦ παρελθόντος χρόνου καὶ τὸ c ἀκριβῶς ὅπως περιμένουμε νὰ κάνει ἡ ἀντωνυμία 'ἐγώ' (ἢ 'ἐσύ', ἢ μιὰ δεικτική, ἀνάλογα μὲ τὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖο ἀντιλαμβανόμαστε τὰ δεύτερα συστατικὰ τῶν σημείων ἀναφορᾶς τοῦ **B**). Ὡστόσο, δὲν μποροῦμε νὰ ἐγγυηθοῦμε τὴν ἐγκυρότητα τῆς Ec ('Ἐγὼ ὑπάρχω') μὲ καμιὰ λογικὴ ἐλάττωση τῆς κλάσης $K_4(L)$. Ἀντίθετα, θὰ πρέπει νὰ μιλᾶμε γιὰ $(K_4(L), J)$—ἐγκυρότητα ὅπου γιὰ ὅλα τὰ $\langle K, U, H\rangle$ τοῦ $K_4(L)$, τὸ $J_{\langle K,U,H\rangle}$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ζευγῶν $\langle i, j\rangle$ ἐν K γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ $\langle j\rangle$ εἶναι στὸ $H_E(\langle i, j\rangle)$. Συμβαίνει ἡ Ec νὰ εἶναι $(K_4(L), J)$—ἔγκυρη, ἀλλὰ δὲν εἶναι τὸ ἴδιο ἔγκυρη ἡ $\neg$ **P** $\neg$ Ec («Ὑπῆρξα πάντοτε»).

Ταχτικὴ τροπικὴ λογική. Ἔστω L μία πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει ὡς μόνο τελεστὴ τὸ $\Box$, καὶ ἔστω $K_5(L)$ ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες, γιὰ κάθε i τοῦ I, $F_{\Box}(i) = \{\langle I\rangle\}$. Ἐδῶ θεωροῦμε τὸ I ὡς τὸ σύνολο ὅλων τῶν δυνατῶν κόσμων. Ἂν τὸ $\langle I, U, F\rangle$ εἶναι στὸ $K_5(L)$, ἡ φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, καὶ τὸ i ἀνήκει στὸ I, τότε ἡ $\Box\varphi$ εἶναι ἀληθὴς στὸ i κάτω ἀπὸ τὸ $\langle I, U, F\rangle$ τότε καὶ μόνο τότε ἄν, γιὰ κάθε j τοῦ I, ἡ φ εἶναι ἀληθὴς στὸ j κάτω ἀπὸ $\langle I, U, F\rangle$. Ἔτσι ἡ ἀναγκαιότητα εἶναι ἡ ἀλήθεια σὲ ὅλους τοὺς δυνατοὺς κόσμους. Εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε πὼς τὸ θεώρημα τοῦ συμπαγοῦς ἰσχύει γιὰ τὸ $K_5(L)$, καὶ τὸ σύνολο τῶν $K_5(L)$—ἔγκυρων προτάσεων ἀξιωματοποιεῖται μὲ μιὰ ποσοδειχτοποιημένη παραλλαγὴ τῆς S5 ποὺ μπορεῖ κανεὶς νὰ βρεῖ στὸν Kripke [16]. Σ' αὐτὸ τὸ ἄρθρο ὁ Kripke ἀπόδειξε τὴν πληρότητα τῶν ἀξιωμάτων του γιὰ ἑρμηνεῖες ποὺ διαφέρουν μόνο ἐπουσιωδῶς ἀπὸ ἐκεῖνες ποὺ δίνονται ἐδῶ, καὶ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πληρότητας ἐδῶ μπορεῖ νὰ συναχθεῖ ἀπὸ τοῦ Kripke μὲ ἁπλὸ τρόπο.

Γενικευμένη τροπικὴ λογική. Ἔστω ἡ L ὅπως πιὸ πάνω, ἔστω M ἡ κλάση τῶν διμελῶν σχέσεων, καὶ ἔστω $K_6(L, M)$ ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L, γιὰ τὶς ὁποῖες, γιὰ κάποιο R στὸ M ἰσχύουν: (6α) ἡ R εἶναι μιὰ αὐτοπαθὴς σχέση ποὺ ἔχει ὡς πεδίο της τὸ I, (6β) γιὰ κάθε i στὸ I, $F_{\Box}(i)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων $\langle J\rangle$ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq I$ καί, γιὰ ὅλα τὰ j γιὰ τὰ ὁποῖα iRj, τὸ j ἀνήκει στὸ J. Καὶ ἐδῶ θεωροῦμε τὸ I ὡς τὸ σύνολο ὅλων τῶν δυνατῶν κόσμων· ἡ κατάφαση ὅτι iRj ἀντιλαμβανόμαστε ὅτι ἐννοεῖ πὼς ὁ κόσμος j εἶναι *προσιτὸς ἀπὸ* τὸν κόσμο i, καὶ ἡ ἀλήθεια τῆς $\Box\,\varphi$ στὸ i σημαίνει τὴν ἀλήθεια τῆς φ σὲ ὅλους τοὺς κόσμους ποὺ εἶναι προσιτοὶ ἀπὸ τὸ i. Γιὰ παράδειγμα, θὰ μπορούσαμε νὰ θεωρήσουμε ἕναν κόσμο ὡς προσιτὸ ἀπὸ ἄλλον μόνο στὴν περίπτωση ποὺ οἱ δύο ἦταν ὅμοιοι σ' ὅλη τὴ διάρκεια τοῦ παρελθόντος, ἤ, ἐναλλακτικά, ὅμοιοι ὡς ἕνα σημεῖο τοῦ παρελθόντος. Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις, ποὺ θὰ ἐξετάσουμε λεπτομερέστερα πιὸ κάτω, ἡ σχέση προσιτότητας εἶναι μιὰ σχέση ἰσοδυναμίας. Ἡ τακτικὴ τροπικὴ λογικὴ εἶναι ἐκείνη ἡ εἰδικὴ περίπτωση ὅπου τὸ M εἶναι ἡ κλάση ὅλων τῶν *καθολικῶν* σχέσεων (δηλαδή, τῶν σχέσεων R γιὰ τὶς ὁποῖες iRj ὅταν εἴτε τὸ i εἴτε τὸ j εἶναι στὸ πεδίο τῆς R).

Ἡ ἰδέα τῆς χρήσης τῶν σχέσεων προσιτότητας σχετικὰ μὲ τὴν τροπικὴ λογικὴ εἰσάχθηκε ἀνεξάρτητα στὴ δημοσίευση τοῦ Kanger τὸ 1957 [17] (ὅπου ἀναφέρει ἔρευνες ποὺ ἔκανε τὸ 1955), στὴν ὁμιλία ποὺ ἀναφέρει ὁ Montague [18], καὶ στὴν ὁμιλία τοῦ 1960 ποὺ ἀναφέρεται στὸν Hintikka [19]. Σ' αὐτὲς τὶς παρουσιάσεις ὅμως, οἱ σχέσεις προσιτότητας ἦταν πάντα σχέσεις ἀνάμεσα σὲ ὑποδείγματα· σχέσεις προσιτότητας ἀνάμεσα σὲ σημεῖα ἀναφορᾶς, ὅπως αὐτὲς ποὺ ἐξετάσαμε ἐδῶ, φαίνεται νὰ εἰσάχθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Kripke [20].

Ὁ Kripke [20] δίνει διάφορα ἀποτελέσματα ἀξιωματοποίησης. Ἰδιαίτερα, ἂν τὸ M εἶναι τὸ σύνολο τῶν αὐτοπαθῶν σχέσεων[9], ἢ τὸ σύνολο τῶν συμμετρικῶν καὶ αὐτοπαθῶν σχέσεων, ἢ ἡ κλάση τῶν σχέσεων ἰσοδυναμίας, ὁ Kripke ἀξιωματοποιεῖ τὸ σύνολο τῶν K_6 (L, M) — ἔγκυρων ἀποφάνσεων τῆς L ποὺ δὲν περιέχουν οὔτε τὸ = οὔτε ἄλλα σύμβολα πράξεων, καὶ στὰ ὁποῖα ἡ ποσοδειχτοποίηση περιορίζεται στὸ κατηγόρημα E τῆς ὕπαρξης. Γιὰ κάμποσες ἀπὸ αὐτὲς τὶς περιπτώσεις, ὁ Cocchiarella [15] κι οἱ Kripke καὶ Richmond Thomasson σὲ ἀδημοσίευτες ἐργασίες, βρῆκαν ἐπεκτάσεις ποὺ χαλαρώνουν τοὺς περιορισμοὺς στὶς ἀποφάνσεις ποὺ ἐξετάζονται.

Ἡ *γενικὴ δεοντικὴ λογικὴ* ἀνακύπτει ὅταν ἀρθεῖ ἡ ἀπαίτηση τῆς αὐτοπάθειας ἀπὸ τὶς σχέσεις προσιτότητας, οἱ ὁποῖες τότε μποροῦν νὰ θεωρηθοῦν καλύτερα ὡς σχέσεις ἠθικῆς ἁρμοδιότητας. Ἰδιαίτερα, τώρα ἀφήνουμε τὴν L νὰ εἶναι μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα μὲ ἕνα μοναδιαῖο τελεστὴ O ὡς τὸ μόνο τελεστή της, καὶ K_7 (L) ὡς τὴν κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L ἔτσι ὥστε, γιὰ κάποια διμελῆ σχέση S ἰσχύουν (7α) τὸ πεδίο τῆς S περιλαμβάνεται στὸ I, καὶ (7β) γιὰ κάθε i τοῦ I, F_o (i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων $\langle J\rangle$ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq I$ καί, γιὰ κάθε j, ἂν iSj τότε τὸ j ἀνήκει στὸ J. Διαβάζουμε τὸ 'Oφ' ὡς «εἶναι ὑποχρεωτικὸ ὅτι φ» καὶ θεωροῦμε πὼς ἡ βεβαίωση iSj σημαίνει ὅτι τὸ j εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς καλύτερους κόσμους ποὺ εἶναι προσιτοὶ ἀπὸ τὸ i. Τότε ἡ ἀλήθεια τῆς Oφ στὸ i ταυτίζεται μὲ τὴν ἀλήθεια τῆς φ σὲ ὅλους τοὺς καλύτερους κόσμους ἀνάμεσα σ' αὐτοὺς ποὺ εἶναι προσιτοὶ ἀπὸ τὸ i. Ἡ *ἀποφαντικὴ λογικὴ* τοῦ K_7 (L) (δηλαδή, τὸ σύνολο τῶν K_7 (L) — ἔγκυρων ἀποφάνσεων ποὺ δὲν περιέχουν μεταβλητὲς οὔτε ἐπιμέρους σταθερές, καὶ ἄρα οὔτε καὶ κατηγορήματα μὲ περισσότερες ἀπὸ 0 θέσεις) ἔχει ἀξιωματοποιηθεῖ σὲ ἀδημοσίευτη ἐργασία τοῦ E. J. Lemmon καὶ τοῦ Dana Scott· μιὰ ἀπόδειξη πληρότητας γιὰ τὸ πλῆρες σύνολο τῶν K_7 (L) — ἔγκυρων ἀποφάνσεων βρέθηκε πρόσφατα ἀπὸ τὸν καθηγητὴ David Kaplan μὲ βάση μιὰ πρόταση τοῦ E. J. Lemmon.

Εἰδικὴ δεοντικὴ λογική. Φαίνεται πὼς δὲν μπορεῖ μὲ εὐλογοφανῆ τρόπο νὰ ἐπιβληθεῖ περιορισμὸς στὴ σχέση τῆς ἠθικῆς ἁρμοδιότητας σὲ ὅλες τὶς περιστάσεις. Ὡστόσο, ὁρισμένες ἐξειδικεύσεις ταιριάζουν σὲ ὁρισμένα πλαίσια ἀναφορᾶς. Μποροῦμε, λ.χ., νὰ ὑποθέσουμε πὼς κάθε κόσμος εἶναι προσιτὸς ἀπὸ (ἂν καὶ ὄχι κατ' ἀνάγκη ἠθικὰ σημαντικὸς γιὰ) κάθε ἄλλο κόσμο. Τότε θὰ πρέπει νὰ ἐξετάσουμε ἕνα μόνο σύνολο 'καλύτερων κόσμων'. Ἑπομένως, ἂν ἡ L εἶναι ὅπως πιὸ πάνω, θέτουμε K_8 (L) ὡς τὴν κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L ἔτσι ὥστε, γιὰ κάποιο μὴ κενὸ ὑποσύνολο J τοῦ I, τὸ F_o (i) νὰ εἶναι, γιὰ ὅλα τὰ i τοῦ I, τὸ σύνολο τῶν 1-άδων $\langle K\rangle$ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq K \subseteq I$. Πάλι τὸ I θεωρεῖται ὡς τὸ σύνολο ὅλων τῶν δυνατῶν κόσμων· τὸ J θεωρεῖται ὡς τὸ σύνολο τῶν καλύτερων (ἢ προτιμότερων) κόσμων κι ἡ ἀλήθεια τῆς Οφ στὸ i ταυτίζεται μὲ τὴν ἀλήθεια τῆς φ σὲ ὅλους τοὺς προτιμότερους κόσμους.

Σὲ ἕνα λίγο πιὸ γενικὸ πλησίασμα, θεωροῦμε τὴν προσιτότητα ὡς μία σχέση ἰσοδυναμίας ἀνάμεσα στοὺς κόσμους (ὅπως τὴ σχέση τῆς ὁμοιότητας στὴ διάρκεια τοῦ παρελθόντος) ἀλλὰ συνεχίζουμε νὰ θεωροῦμε ἕνα μόνο σύνολο προτιμητέων κόσμων. Τότε ἡ Οφ θεωρεῖται ἀληθὴς στὸ i τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ φ εἶναι ἀληθὴς σὲ ὅλους τοὺς κόσμους ποὺ εἶναι προσιτοὶ ἀπὸ τὸ i καὶ προτιμότεροι. Ἔτσι βάζουμε K_9 (L) γιὰ τὴν κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L στὶς ὁποῖες ὑπάρχει μιὰ σχέση ἰσοδυναμίας R καὶ ἕνα σύνολο J ποὺ περιέχεται στὸ I ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύουν: (9α) γιὰ κάθε i τοῦ I, ὑπάρχει j στὸ J, τέτοιο ὥστε iRj, καὶ (9β) γιὰ κάθε i τοῦ I, τὸ F_o (i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων $\langle K\rangle$ μὲ τὴν ἰδιότητα $K \subseteq I$ καί, γιὰ κάθε j τέτοιο ὥστε iRj καὶ j ἐν J, ἰσχύει j ἀνήκει στὸ K. (Ἡ αἰσιόδοξη παραδοχὴ (9α), ὅτι ἀπὸ κάθε κόσμο εἶναι προσιτὸς ἕνας προτιμότερος κόσμος, δὲν εἶναι παράλογη ἂν μὲ R ἐννοοῦμε μιὰ σχέση ὅπως τὴ σχέση τῆς ὁμοιότητας στὸ παρελθόν, τὸ παρελθὸν θεωρεῖται πὼς ἔχει πεπερασμένη διάρκεια, καὶ τὸ μέλλον θεωρεῖται πὼς ἔχει ἄπειρη διάρκεια).

Εἶναι εὔκολο νὰ δεῖ κανεὶς πὼς οἱ K_8 (L) — ἔγκυρες ἀποφάνσεις τῆς L εἶναι οἱ ἴδιες μὲ τὶς K_9 (L) — ἔγκυρες ἀποφάνσεις τῆς L, καὶ ὅτι καὶ οἱ δύο συμπίπτουν μὲ τὶς ἔγκυρες ἀποφάνσεις (χαρακτηρισμένες ὅπως κάνει ἡ θεωρία τῶν ὑποδειγμάτων, ἀλλὰ μὲ διαφορετικὸ τρόπο) τῆς δεοντικῆς λογικῆς μὲ ποσοδεῖχτες ποὺ ἀναφέρεται στὴν ὁμιλία τοῦ 1955 ποὺ ἀναφέρει ὁ Montague [18]. Ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς πληρότητας ποὺ ἀναφέρεται σ' ἐκεῖνο τὸ ἄρθρο, εἶναι εὔκολο νὰ συναχθεῖ πὼς ἡ ἀποφαντικὴ λογικὴ τοῦ K_8 (L) (ὅπως καὶ τοῦ K_9 (L)) ἀξιωματοποιεῖται, σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τῆς ἀποσύνδεσης, ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα σχήματα:

φ (ἂν φ εἶναι μία ταυτολογία),
Οφ (ἂν φ εἶναι μία ταυτολογία),
$O\ (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)$,

$$O \quad (O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)),$$

$$\neg \ O\varphi \leftrightarrow O \neg \ O\varphi,$$

$$O \quad (\neg O\varphi \leftrightarrow O \neg \ O\varphi).$$

Ὡς παράδειγμα τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν, ἂς θεωρήσουμε τὸ *συνδυασμὸ τῆς ἀναγκαιότητας μὲ τὴν ὑποχρέωση*. Ὑποθέτουμε πὼς ἡ L εἶναι μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει ὡς μοναδικοὺς τελεστὲς τοὺς $\Box$ καὶ O, πὼς M εἶναι μία κλάση διμελῶν σχέσεων, καὶ πὼς $K_{10}(L, M)$ εἶναι ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F \rangle$ τῆς L μὲ τὴν ἰδιότητα, γιὰ κάποιο R τῆς M καὶ κάποια διμελῆ σχέση S, ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (6α), (6β) καὶ (7β) καὶ ὅτι, ἐπιπλέον, $S \subseteq R$.

Ὡς ἄλλο παράδειγμα, ἂς θεωρήσουμε τὸ *συνδυασμὸ τῶν χρόνων μὲ τὴ χρονικὰ ἐξαρτημένη ἀναγκαιότητα καὶ τὴ χρονικὰ ἐξαρτημένη ὑποχρέωση*. Ἂς εἶναι ἡ L ὅπως πιὸ πάνω ἀλλὰ μὲ τὴν προσθήκη τῶν τελεστῶν χρόνου **P** καὶ **F**, καὶ ἂς εἶναι L′ μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ περιέχεται στὴν $L - \{P, F, \Box, O\}$ καὶ $K_{11}(L, L')$ ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν **C** τῆς L ἔτσι ὥστε γιὰ μερικὰ I, J, U, $\leqslant$, $\mathbf{A}_i$ (γιὰ i ἐν I), F_i (γιὰ i ἐν I), R_i (γιὰ i ἐν I), $\mathbf{B}_i$ (γιὰ i ἐν I) καὶ G_i (γιὰ i ἐν I), νὰ ἰσχύουν: (11α) τὰ I, J, U εἶναι σύνολα, (11β) ἡ $\leqslant$ εἶναι μιὰ ἁπλὴ διάταξη τοῦ I, (11γ) γιὰ κάθε i ἐν I, $\mathbf{A}_i = \langle J, U, F_i \rangle$ καὶ $\mathbf{A}_i$ εἶναι μιὰ δυνατὴ ἑρμηνεία τῆς L′, (11δ) γιὰ κάθε i ἐν I, R_i εἶναι ἐκείνη ἡ διμελὴς σχέση ἀνάμεσα σὲ μέλη τοῦ J γιὰ τὴν ὁποία, γιὰ ὅλα τὰ j, j′ στὸ J, $jR_i j'$ τότε καὶ μόνο τότε ἂν $(F_{i'})_A(j) = (F_{i'})_A(j')$ κάθε φορὰ ποὺ $i' \leqslant i$ καὶ $i' \neq i$ καὶ τὸ A ἀνήκει στὴν L′, (11ε) γιὰ κάθε i ἐν I, $\mathbf{B}_i = \langle J, U, G_i \rangle$, $F_i \subseteq G_i$ καὶ τὸ $\mathbf{B}_i$ ἀνήκει στὸ $K_{10}(L - \{P, F\}, \{R_i\})$, καὶ (11στ) τὸ **C** εἶναι τὸ $\leqslant$ — γινόμενο τῶν συστημάτων $\mathbf{B}_i$, γιὰ i ἐν I. Σκεφτόμαστε τὰ μέλη τοῦ I ὡς χρονικὲς στιγμές, $\leqslant$ ὡς τὴ διάταξή τους, καὶ τὸ J ὡς τὸ σύνολο τῶν δυνατῶν κόσμων. Ἡ κατάφαση ὅτι $jR_i j'$ σημαίνει ὅτι οἱ κόσμοι j καὶ j′ εἶναι ὅμοιοι σὲ ὅλους τοὺς χρόνους πρὶν ἀπὸ τὸν i ὡς πρὸς τὰ χαρακτηριστικὰ ποὺ ἀναπαριστάνει ἡ γλώσσα L′. Ἂν οἱ συνθῆκες (11α) — (11στ) ἱκανοποιοῦνται, φ εἶναι μία ἀπόφανση τῆς L, καὶ $\langle i, j \rangle$ εἶναι ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τοῦ **C**, τότε εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ $\Box\varphi$ εἶναι ἀληθὴς στὸ $\langle i, j \rangle$ (δηλαδή, τὴ στιγμὴ i στὸν κόσμο j) κάτω ἀπὸ τὴ **C** τότε καὶ μόνο τότε ἂν ἡ φ εἶναι ἀληθὴς κάτω ἀπὸ τὴ **C** σὲ ὅλα τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς $\langle i, j' \rangle$ γιὰ τὰ ὁποῖα $jR_i j'$ (δηλαδή, τὴ στιγμὴ i σὲ ὅλους τοὺς κόσμους ποὺ μοιάζουν στὸν j σὲ ὅλους τοὺς χρόνους πρὶν ἀπὸ τὸν i). Ἔτσι ἡ '$\Box\varphi$' μπορεῖ, χωρὶς παραλογισμό, νὰ διαβαστεῖ ὡς «ἡ φ εἶναι ἀναγκαία μὲ βάση τὸ παρελθὸν» καὶ ἡ 'Oφ', γιὰ παρόμοιους λόγους, ὡς «ἡ φ εἶναι ὑποχρεωτικὴ μὲ βάση τὸ παρελθόν».

Ὁ *εὐχετικὸς μέλλων τῆς ὑποτακτικῆς* (future subjunctive conditional) μπορεῖ, φαίνεται, νὰ διευθετηθεῖ χωρὶς νὰ ἀπομακρυνθοῦμε ἀπὸ τὶς ἑρμηνεῖες στὴν $K_{11}(L, L')$. Πράγματι ἡ

$$\Box \neg \mathbf{F} \neg (\varphi \rightarrow \psi)$$

φαίνεται νὰ ἐκφράζει σωστὰ τὴ βεβαίωση ὅτι ἂν ἦταν ἡ περίπτωση ὅτι φ, θὰ ἦταν (τὴν ἴδια στιγμὴ) ἡ περίπτωση ὅτι ψ.

'Ανάμεσα στὶς ὑποτακτικὲς κάτω ἀπὸ συνθῆκες, εἶναι ὁ μέλλων ποὺ μοιάζει νὰ ταιριάζει περισσότερο στὸν ἠθικὸ λόγο· πρὸς τὴν ἴδια κατεύθυνση θὰ μποροῦσε νὰ γίνει ἐπεξεργασία τῶν ἄλλων ὑποτακτικῶν ὑπὸ συνθήκη· ὡστόσο θὰ ἦταν πιὸ περίπλοκη. Ἡ πρώτη ἐπαρκὴς ἐπεξεργασία τοῦ ἐνεστώτα τῆς ὑποτακτικῆς μὲ συνθῆκες δόθηκε, μέσα στὰ πλαίσια τῆς πραγματολογίας, σὲ ἀδημοσίευτη ἐργασία τοῦ καθηγητῆ David Lewis· ἄλλες ἐπεξεργασίες στὶς ὁποῖες φαίνεται νὰ ὑπάρχουν βελτιώσεις καὶ ἐπεκτάσεις, ἀναπτύχθηκαν ἀπὸ τὸν Lewis καὶ ἀπὸ ἐμένα. Ἡ παρούσα ἀνάλυση τοῦ μέλλοντα τῆς ὑποτακτικῆς μὲ συνθῆκες, ἂν καὶ εἶναι δική μου, ἐπωφελήθηκε ἀπὸ κριτικὴ τοῦ καθηγητῆ Lewis πάνω σὲ μιὰ προγενέστερη πρόταση κι ἀπὸ συζητήσεις μὲ τοὺς J. A. W. Kamp καὶ Dana Scott.

Σὲ ὅλα τὰ παραπάνω παραδείγματα οἱ σχέσεις καταλληλότητας ἢ προσιτότητας θὰ ἀρκοῦσαν γιὰ τὴν ἑρμηνεία τῶν τελεστῶν. Τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα, γιὰ τὰ ὁποῖα δὲν μποροῦμε νὰ ποῦμε τὸ ἴδιο, θὰ δείξουν τὴ συμπληρωματικὴ γενικότητα τῆς παρουσίασης τούτης.

Ἡ *σημασιολογία τοῦ Kripke γιὰ τὶς μὴ κανονικὲς τροπικὲς λογικές*. Ἔστω L μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει τὸ $\Box$ ὡς μοναδικὸ τελεστή της. Καὶ ἔστω $K_{12}(L)$ ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες, καὶ γιὰ κάποια διμελῆ σχέση R, ἰσχύουν: (12α) τὸ πεδίο τῆς R περιέχεται στὸ I, (12β) iRi κάθε φορὰ ποὺ iRj, (12γ) γιὰ ὅλα τὰ i τοῦ I, $F_{\Box}(i)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν I-άδων $\langle J\rangle$ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq I$, iRi καὶ τὸ j ἀνήκει στὸ J γιὰ ὅλα τὰ j μὲ τὴν ἰδιότητα iRj. Τότε ἕνα ἀπὸ τὰ βασικὰ θεωρήματα τοῦ Kripke [21] μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ ἔτσι: ἡ ἀποφαντικὴ λογικὴ τοῦ $K_{12}(L)$ εἶναι ἡ ἴδια μὲ τὰ συνολοθεωρητικὰ θεωρήματα (διατυπωμένα στὴν L) τοῦ συστήματος E2 τοῦ Lemmon [22]. Τὰ ἄλλα θεωρήματα πληρότητας τοῦ Kripke [21] μποροῦν νὰ διευθετηθοῦν μὲ παρόμοιο τρόπο στὸ ἐννοιολογικὸ πλαίσιο τῆς πραγματολογίας.

Ἕνα ἄλλο ὑπόδειγμα τροπικῆς λογικῆς. Οἱ ἑρμηνεῖες τοῦ Kripke ποὺ ἀναφέρθηκαν πιὸ πάνω δίνουν κομψὰ θεωρήματα πληρότητας γιὰ συστήματα ὅπως τὸ S2 καὶ τὸ S3, ἀλλὰ δὲν ἔχουν ἰσχυρὸ διαισθητικὸ περιεχόμενο. Ὡστόσο, μπορεῖ κανεὶς νὰ βρεῖ παραδείγματα διαισθητικὰ σημαντικῶν ἑρμηνειῶν τῆς ἀναγκαιότητας ποὺ κι αὐτὲς φαίνεται νὰ μὴ μποροῦν νὰ ἐκφραστοῦν μὲ σχέσεις καταλληλότητας. Γιὰ παράδειγμα, ἂς εἶναι ἡ L ὅπως πιὸ πάνω, ἔστω **M** ἡ κλάση τῶν συνόλων διμελῶν σχέσεων, καὶ ἔστω K_{13} (L, **M**) ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν $\langle I, U, F\rangle$ γιὰ τὴν L ἔτσι ὥστε, γιὰ κάποιο M τοῦ **M** νὰ ἰσχύουν: (13α) τὸ M εἶναι ἕνα σύνολο αὐτοπαθῶν σχέσεων ποὺ ἔχουν τὸ I ὡς πεδίο τους καὶ (13β) γιὰ κάθε i ἐν I, $F_{\Box}(i)$ εἶναι τὸ σύνολο τῶν I-άδων $\langle J\rangle$ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq I$ καὶ ὑπάρχει R στὸ M τέτοιο ὥστε τὸ J περιέχει ὅλα τὰ ἀντικείμενα j γιὰ τὰ ὁποῖα iRj. Τὰ μέλη τοῦ I θεωροῦνται ξανὰ ὡς οἱ δυνατοὶ κόσμοι. Οἱ σχέσεις στὸ M θεωροῦνται ὅτι ἀντιστοιχοῦν στοὺς διάφορους τρόπους προσιτότητας. Μὲ ἄλλα λόγια, ἂν τὸ R εἶναι στὸ M, τότε τὸ νὰ ποῦμε ὅτι iRj εἶναι νὰ ποῦμε ὅτι τὸ j εἶναι προσιτὸ ἀπὸ τὸ i *μὲ ἕναν ὁρισμένο τρόπο*. Ἡ ἀλήθεια τῆς $\Box\varphi$ σ' ἕναν κόσμο i συμπίπτει μὲ τὴν ἀλήθεια τῆς φ σὲ ὅλους τοὺς κόσμους ποὺ εἶναι προσιτοὶ ἀπὸ τὸ i *μὲ κάποιο ἰδιαίτερο τρόπο*.

Μποροῦμε, λόγου χάρη, νὰ θεωρήσουμε ὅτι οἱ τρόποι προσιτότητας ἀντιστοιχοῦν σὲ σημεῖα τοῦ παρελθόντος καὶ μάλιστα μὲ τέτοιο τρόπο ὥστε ἕνας κόσμος νὰ εἶναι προσιτὸς ἀπὸ ἕναν ἄλλο μὲ τὸν τρόπο ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ i τότε καὶ μόνο τότε ἂν οἱ δύο κόσμοι συμπίπτουν σὲ συγκεκριμένα γνωρίσματα ὡς τὴ στιγμὴ i. Γιὰ μεγαλύτερη λεπτομέρεια, ἔστω L ὅπως πιὸ πάνω, ἀλλὰ μὲ τὴν προσθήκη τῶν τελεστῶν χρόνου **P** καὶ **F**, L′ ἡ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ περιέχεται στὴν $L-\{\mathbf{P}, \mathbf{F}, \Box\}$ καὶ K_{14} (L, L′) ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν **C** τῆς L ἔτσι ὥστε γιὰ κάποιο I, J, U, $\leqslant$, A_i (γιὰ i ἐν I), F_i (γιὰ i ἐν I), M_i (γιὰ i ἐν I), $\mathbf{B}_i$ (γιὰ i ἐν I), καὶ G_i (γιὰ i ἐν I), ἰσχύουν οἱ συνθῆκες (11α) - (11γ) καὶ ἐπιπλέον οἱ ἀκόλουθες: (14α) γιὰ κάθε i ἐν I, M_i εἶναι τὸ σύνολο τῶν διμελῶν σχέσεων R ἀνάμεσα σὲ μέλη τοῦ J τέτοια ὥστε γιὰ κάποιο i′, $i' \leqslant i$, $i' \neq i$ καὶ γιὰ ὅλα τὰ j, j′ ἐν J, jRj′ τότε καὶ μόνο τότε ἂν $(F_i{}'')_A(j) = (F_i{}'')_A(j')$ κάθε φορὰ ποὺ $i'' \leqslant i'$, $i'' \neq i'$ καὶ A ἀνήκει στὴν L′, (14β) γιὰ κάθε i στὸ I, $\mathbf{B}_i = \langle J, U, G_i \rangle$, $F_i \subseteq G_i$, καὶ $\mathbf{B}_i$ ἀνήκει στὸ $K_{13}(L-\{\mathbf{P}, \mathbf{F}\}, \{M_i\})$, καὶ (14γ) τὸ **C** εἶναι τὸ $\leqslant$ γινόμενο τῶν συστημάτων $\mathbf{B}_i$, γιὰ i ἐν I. Ἂν αὐτὲς οἱ συνθῆκες ἱκανοποιοῦνται, φ εἶναι μιὰ ἀπόφανση τῆς L, καὶ ⟨i, j⟩ ἕνα σημεῖο ἀναφορᾶς τοῦ **C**, τότε εἶναι εὔκολο νὰ δοῦμε ὅτι ἡ $\Box\varphi$ εἶναι ἀληθὴς στὸ ⟨i, j⟩ (δηλαδή, τὴ στιγμὴ i στὸν κόσμο j) κάτω ἀπὸ τὸ **C** τότε καὶ μόνο τότε ἂν ὑπάρχει ἕνα R στὸ M_i τέτοιο ὥστε φ εἶναι ἀληθὴς στὰ σημεῖα ἀναφορᾶς ⟨i, j′⟩ γιὰ τὰ ὁποῖα jRj′. Ἔτσι ἡ '$\Box\varphi$' μπορεῖ νὰ διαβαστεῖ, ἐναλλακτικά, ὡς «μποροῦσε νὰ προβλεφθεῖ κάποια στιγμὴ στὸ παρελθὸν ὅτι τώρα θὰ συνέβαινε ὅτι φ»[10].

Αὐτὸ τὸ παράδειγμα ὑποδείχνει διάφορους τρόπους προσδιορισμοῦ τῆς κλάσης **M** σχετικὰ μὲ τὸ K_{13}(L, **M**). Θὰ μπορούσαμε, λόγου χάρη, νὰ θέλουμε, ὅπως καὶ στὸ παράδειγμα, κάθε σύνολο τοῦ **M** νὰ εἶναι ἕνα σύνολο σχέσεων ἰσοδυναμίας ποὺ εἶναι κλειστὸ ὡς πρὸς τὴν τομὴ συνόλων· ἰδιαίτερα, ἂν $\mathbf{M}_1$ εἶναι ἡ κλάση τῶν συνόλων M μὲ τὶς ἰδιότητες, γιὰ κάποιο σύνολο I, (α) τὸ M εἶναι ἕνα μὴ κενὸ σύνολο σχέσεων ἰσοδυναμίας ποὺ ἔχουν ὡς πεδίο τους τὸ I, καὶ (β) $R \cap S$ ἀνήκει στὸ M ὅταν τὰ R, S ἀνήκουν στὸ M. Ἂν τὸ M ἀνήκει στὸ $\mathbf{M}_1$, τότε μποροῦμε νὰ θεωροῦμε κάθε μέλος R τοῦ M ὡς μία σχέση ἀνάμεσα σὲ κόσμους ταυτότητας ὡς πρὸς ὁρισμένα γνωρίσματα.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη μεριά, μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε τὴν προσιτότητα ὄχι μὲ τὴν ταυτότητα ἀλλὰ μὲ τὴν *ὁμοιότητα* ὡς πρὸς ὁρισμένα γνωρίσματα. Καὶ σ' αὐτὴ τὴν περίπτωση δὲν εἶναι παράλογο νὰ θεωρήσουμε τὴν κλάση $\mathbf{M}_2$ ὅλων τῶν συνόλων γιὰ τὰ ὁποῖα, γιὰ κάποιο σύνολο I, ἰσχύουν (α) τὸ M εἶναι ἕνα μὴ κενὸ σύνολο αὐτοπαθῶν καὶ συμμετρικῶν σχέσεων ποὺ ἔχουν ὡς πεδίο τους τὸ I, (β) $R \cup S$ ἀνήκει στὸ M ὅταν τὰ R, S ἀνήκουν στὸ M, καὶ (γ) γιὰ κάθε R ποὺ ἀνήκει στὸ M, ὑπάρχει ἕνα S τοῦ M τέτοιο ὥστε, γιὰ ὅλα τὰ i, j, k, ἂν iSj καὶ jSk, τότε iRk. Ἂν τὸ M ἀνήκει στὸ M_2, θεωροῦμε κάθε μέλος R τοῦ M ὡς μία σχέση ἀνάμεσα σὲ κόσμους ὁμοιότητας ὡς πρὸς ὁρισμένα γνωρίσματα καὶ ὡς ἕναν ὁρισμένο βαθμό. Γενικά, ἡ R δὲν θὰ εἶναι μεταβατική. Ἡ σχέση S, ποὺ ἡ ὕπαρξή της βεβαιώνεται στὴ συνθήκη (γ) μπορεῖ νὰ ἐννοηθεῖ ὡς ἡ σχέση ὁμοιότητας στὰ γνωρίσματα ποὺ συνεπάγεται ἡ R ἀλλὰ μὲ διπλάσιο βαθμὸ ὁμοιότητας ἀπ' ὅ,τι ἡ R[11].

Μιὰ παραπέρα χαλάρωση στὶς παραδοχές μας, ὁδηγεῖ στὴν κλάση M_3 ὅλων τῶν συνόλων M γιὰ τὰ ὁποῖα, γιὰ κάποιο σύνολο I, ἰσχύουν (α) τὸ M εἶναι ἕνα μὴ κενὸ σύνολο αὐτοπαθῶν σχέσεων ποὺ ἔχουν τὸ I ὡς πεδίο τους, (β) $R \cap S$ ἀνήκει στὸ M ὅταν S, R ἀνήκουν στὸ M, καὶ (γ) κάθε φορὰ ποὺ τὸ R ἀνήκει στὸ M καὶ τὸ i στὸ I, ὑπάρχει ἕνα S τοῦ M τέτοιο ὥστε, γιὰ ὅλα τὰ j, k, ἂν iSj καὶ jSk, τότε iRk.

Εἶναι σαφὲς ὅτι $M_1 \subseteq M_2 \subseteq M_3$. Μπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδείξει ὅτι τὸ $K_{13}(L, M_3)$ εἶναι ἀκριβῶς ἡ κλάση τῶν *τοπολογικῶν* ἑρμηνειῶν τῆς τροπικῆς λογικῆς, δηλαδὴ ἡ τάξη τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν ⟨I, U, F⟩ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχει ἕνα σύνολο T τέτοιο ὥστε (α) ⟨I, T⟩ εἶναι ἕνας τοπολογικὸς χῶρος[12] καὶ (β) γιὰ κάθε i στὸ I, τὸ $F_{\Box}$(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων ⟨J⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες $J \subseteq I$ καὶ γιὰ κάποιο K τοῦ T, τὸ i ἀνήκει στὸ K καὶ $K \subseteq J$. Ἔτσι, οἱ $K_{13}(L, M_3)$ — ἔγκυρες ἀποφάνσεις εἶναι ἀκριβῶς τὰ θεωρήματα μιᾶς ποσοδειχτοποιημένης παραλλαγῆς τοῦ συστήματος S4 τοῦ Lewis· αὐτὸ ἀποδείχτηκε γιὰ τὴν τοπολογικὴ ἑρμηνεία στὸ ἔργο τῆς Rasiowa καὶ τοῦ Sikorski [23].

Ἐπαγωγικὴ λογική. Γιὰ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ r τέτοιον ὥστε $0 \leqslant r \leqslant 1$, ἔστω P_r ἕνας τελεστὴς μιᾶς θέσης· καὶ ἔστω ὅτι $P_r \neq P_s$ ὅταν $r \neq s$. Ἔστω L μιὰ πραγματολογικὴ γλώσσα ποὺ ἔχει ὡς τελεστές της τὰ σύμβολα P_r $(0 \leqslant r \leqslant 1)$· καὶ ἔστω $K_{15}(L)$ ἡ κλάση τῶν δυνατῶν ἑρμηνειῶν ⟨I, U, F⟩ τῆς L γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπάρχουν **G**, μ γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν: (15α) ⟨I, **G**, μ⟩ εἶναι ἕνα πεδίο πιθανοτήτων (μὲ τὴν ἔννοια τοῦ Kolmogorov [24]), καὶ (15β) γιὰ κάθε i στὸ I καὶ κάθε πραγματικὸ ἀριθμὸ r τέτοιο ὥστε $0 \leqslant r \leqslant 1$, F_{P_r}(i) εἶναι τὸ σύνολο τῶν 1-άδων ⟨J⟩ γιὰ τὶς ὁποῖες τὸ J εἶναι ἕνα μέλος τοῦ **G** καὶ μ (J) = r. Ἔτσι μποροῦμε νὰ διαβάσουμε τὸ 'P_r φ' ὡς «εἶναι πιθανὸν ἀκριβῶς στὸ βαθμὸ r ὅτι φ»· καὶ 'πιθανὸ' μπορεῖ νὰ ἐννοηθεῖ μὲ τὴν ἔννοια εἴτε μιᾶς θεωρίας σχετικῆς συχνότητας εἴτε μιᾶς a priori θεωρίας, ἀνάλογα μὲ τὸ ἂν τὰ σημεῖα ἀναφορᾶς θεωροῦνται ὡς στιγμὲς στὸ χρόνο ἢ ὡς δυνατοὶ κόσμοι. Ἀντίστοιχα τὸ 'P_1 φ' μπορεῖ νὰ διαβαστεῖ εἴτε ὡς «εἶναι σχεδὸν πάντα ἡ περίπτωση ὅτι φ» εἴτε ὡς «εἶναι σχεδὸν βέβαιο ὅτι φ».

Καὶ μπορεῖ κανεὶς νὰ βρεῖ παραδείγματα τελεστῶν χρόνου ποὺ δὲν μποροῦν νὰ ἑρμηνευτοῦν μὲ σχέσεις καταλληλότητας. Ὁ κ. Kamp θεώρησε δύο διμελεῖς τελεστὲς αὐτοῦ τοῦ εἴδους, ἀντίστοιχους στὶς ἐκφράσεις «ἀφοῦ ἦταν ἡ περίπτωση ὅτι φ, ἦταν (πάντα) ἡ περίπτωση ὅτι ψ» καὶ «ὡσότου εἶναι ἡ περίπτωση ὅτι φ, θὰ εἶναι (πάντα) ἡ περίπτωση ὅτι ψ». (Ὁ κ. Kamp ἀνάλυσε τὴ γενικὴ ἔννοια ἑνὸς χρόνου καὶ ἔδειξε, σὲ ἐργασίες ποὺ δὲν ἔχουν ἀκόμα δημοσιευτεῖ, ὅτι κάθε χρόνος μπορεῖ νὰ ἐκφραστεῖ μὲ τὴ βοήθεια αὐτῶν τῶν δύο.)

Ἐδῶ μόνο θὰ ἀναφέρω ἄλλα τρία ἀποτελέσματα τῆς πραγματολογίας. (1) Ὁ κ. Kamp ἀνάλυσε, ἐκθέτοντας διάφορα ἐνδιαφέροντα χαρακτηριστικά, τὰ δεικτολογικὰ ἐπιρρήματα 'χτές', 'σήμερα' καὶ 'αὔριο', ποὺ χρησιμοποιοῦνται σὲ συνδυασμὸ μὲ τελεστὲς χρόνου. (2) Μιὰ ἐπεξεργασία μὲ ἡμερομηνίες, χρησιμοποιημένες σὲ συνδυασμὸ μὲ τελεστὲς χρόνου, ἔδωσε ὁ Prior [25] καὶ ἀνάπτυξε παραπέρα ὁ κ. Kamp[13]. (3) Ἕνα εἶδος ἐπέκτασης δευτέρου βαθμοῦ γιὰ τὴν πραγματολογία ἀνάπτυξε ὁ Montague [27] καὶ τὴν ταύτισε μὲ τὴν *ἐντασιακὴ λογική*· ἴσως νὰ ἔχει παραχθεῖ αὐτὸ ποὺ μοιάζει νὰ εἶναι ἡ πρώτη ἐντελῶς ἐπαρκὴς ἐπεξεργασία τῶν συμφραζομένων μὲ πεποιθήσεις καὶ τὰ παρόμοια. Στὸν Montague [28] δίνεται ἕνας ἀριθμὸς φιλοσοφικῶν ἐφαρμογῶν τοῦ διευρυμένου συστήματος.

Μετάφραση : Π. Χριστοδουλίδης

Σημειώσεις

1. Ἀπὸ τὸ La Philosophie Contemporaine, ἐκδ. Raymond Klibansky (La Nuova Italia, Firenze 1968), τόμος 1, σ. 102 - 122. Ἀγγλικὸς τίτλος : Pragmatics. © Institut International de Philosophie, Pagis. Δημοσιεύεται μὲ εἰδικὴ ἄδεια τοῦ ἐκδότη.

2. Ὅ.π., A. Robinson, Model Theory, σ. 61 - 73. [ΣτΜ].

3. Ἄλλοι ὅροι γι' αὐτὲς τὶς ἐκφράσεις περιλαμβάνουν «ἐγωκεντρικὰ ἐπιμέρους» (Russell), «ἐκφράσεις ποὺ ἀντανακλοῦν τὸ σῆμα» (Reichenbach), «λέξεις ἐνδεῖκτες» (Goodman), καὶ «μὴ αἰώνιες ἀποφάνσεις» (Quine).

4. Ἡ μεταθεωρία ὑποτίθεται πὼς συμπίπτει μὲ κάποια παραλλαγὴ τῆς θεωρίας τῶν συνόλων ποὺ ἔχει γνήσια σύνολα (ἂς ποῦμε τὴ θεωρία τῶν Bernays - Morse χωρὶς ὅμως τὰ ἐπιμέρους· γιὰ τὴ διατύπωση μιᾶς τέτοιας θεωρίας βλέπε τὸ Παράρτημα τοῦ Kelley [11] ἢ τὴ μονογραφία τῶν Montague, Scott, Tarski [12]), συμπληρωμένη μὲ ἀναφορὲς γιὰ τὰ διάφορα σύμβολα καὶ ὁμάδες συμβόλων τῆς γλώσσας - ἀντικείμενο, καὶ μὲ ἕνα σύμβολο σύνδεσης [concatenation] (ἐδῶ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὴν ἁπλὴ συμπαράθεση), καὶ ὁρισμένες παραδοχὲς γιὰ τὴ διακριτότητα καὶ τὴ χωριστότητα τῶν συμβόλων καὶ τῶν ὁμάδων ἀπὸ σύμβολα ποὺ ἀνήκουν στὴ γλώσσα - ἀντικείμενο. Θὰ ἔπρεπε ἴσως νὰ τονιστεῖ ὅτι τὰ '$\neg$', '$\wedge$' καὶ τὰ παρόμοια δὲν εἶναι σύμβολα τῆς γλώσσας - ἀντικείμενο, ἀλλὰ μᾶλλον μεταγλωσσικὰ ὀνόματα τέτοιων συμβόλων.

5. Μὲ «ἄπειρη ἀκολουθία» ἐδῶ ἐννοῶ μιὰ *κοινὴ* ἄπειρη ἀκολουθία, δηλαδὴ μιὰ συνάρτηση ποὺ ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ της ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

6. Αὐτὴ ἡ παρατήρηση, ὅπως καὶ πολλὲς ἄλλες γενικὲς ἰδέες ποὺ χρησιμοποιοῦνται στοὺς ὁρισμοὺς αὐτοῦ τοῦ τμήματος, ὀφείλονται βέβαια στὸν Tarski [7].

7. Ἐδῶ τὸ Λ εἶναι ἡ κενὴ ἀκολουθία. F_c (i) εἶναι ἡ συνάρτηση 0-θέσεων, καὶ ἡ τιμή της γιὰ τὴν 0-άδα Λ εἶναι τὸ δυνατὸ ἀντικείμενο ποὺ διαισθητικὰ ὑποδηλώνεται μὲ τὸ c.

8. Μιὰ *ἁπλὴ διάταξη* γιὰ ἕνα σύνολο I εἶναι μιὰ αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ σχέση ποὺ ἔχει τὸ I ὡς πεδίο της. (Ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρικὴ τότε καὶ μόνο ἂν $x = y$ ὅταν xRy καὶ yRx).

9. Μιὰ αὐτοπαθὴς σχέση εἶναι μιὰ σχέση ποὺ καμιὰ φορὰ λέγεται αὐτοπαθὴς στὸ πεδίο της, δηλαδή, εἶναι μιὰ διμελὴς σχέση R τέτοια ὥστε γιὰ κάθε i στὸ πεδίο τῆς R ἰσχύει iRi.

10. Αὐτὸ τὸ διάβασμα προτάθηκε ἀπὸ τὸν κ. Wilbur Walkoe.

11. Ἡ κλάση $\mathbf{M}_2$ ἔχει στενὴ σχέση μὲ τὴν κλάση τῶν *ὁμαλῶν χώρων* (μὲ τὴν ἔννοια τῆς γενικῆς τοπολογίας· γιὰ ἕναν ὁρισμὸ καὶ συζήτηση, δὲς Kelley [11], σ. 175 - 216), ἰδιαίτερα, ἂν τὸ M ἀνήκει τὸ $\mathbf{M}_2$, τὸ I εἶναι τὸ κοινὸ πεδίο ὅλων τῶν σχέσεων στὸ M, καὶ N εἶναι τὸ σύνολο τῶν σχέσεων S ἀνάμεσα σὲ μέλη τοῦ I τέτοια ὥστε ἂν $R \sqsubseteq S$ γιὰ κάποιο R τοῦ M, τότε $\langle I, N \rangle$ εἶναι ἕνας ὁμαλὸς χῶρος· καὶ ἀντίστροφα, ἂν τὸ $\langle X, T \rangle$ εἶναι ἕνας ὁμαλὸς χῶρος καὶ M εἶναι τὸ σύνολο τῶν συμμετρικῶν σχέσεων στὸ T, τότε τὸ M ἀνήκει στὸ $\mathbf{M}_2$ καὶ ὅλες οἱ σχέσεις στὸ M ἔχουν τὸ X ὡς πεδίο τους.

12. Γιὰ τὸν ὁρισμὸ ἑνὸς τοπολογικοῦ χώρου βλέπε, λ.χ. Kelley [11] σ. 37.

13. Ἂν καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ μόνο σημεῖο στὸ ὁποῖο κάτι ἀποδίνεται εἰδικὰ στὸν Arthur Prior, θὰ ἤθελα νὰ ἀναφέρω ὅτι ὁλόκληρη ἡ σύγχρονη ἀνάπτυξη τῆς λογικῆς τῶν χρόνων ἐγκαινιάστηκε καὶ ὑποκινήθηκε ἀπὸ τὸ ἔργο του, ἰδιαίτερα ἀπὸ τὰ βιβλία του [26 καὶ 25].

Βιβλιογραφία

ADDISON, J. W., HENKIN, L., & TARSKI, A., [8] *The Theory of Models*, Amsterdam 1965.

BAR-HILLEL, Y., [10] *Indexical Expressions*, Mind *63*, 359-379 (1954).

COCCHIARELLA, N., [14] A *Completeness Theorem for Tense Logic*, The Journal of Symbolic Logic *31*, 689-690 (1966).

— [15] *Tense Logic: a Study of Temporal Reference* (Dissertation), Los Angeles 1966.

FREGE, G., [13] *Über Sinn und Bedeutung*, Zeitschrift für Philosophie und philos. Kritik 100, 25-50 (1892).

GÖDEL, K., [5] *Über unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik *38*, 173-198 (1931).

HILBERT, D., & BERNAYS, P., [6] *Grundlagen der Mathematik*, Berlin 1934-1939.

HINTIKKA, J., [19] *Modality and Quantification*, Theoria *27*, 119-128 (1961).

KANGER, S., [17] *Provability in Logic*, Stockholm 1957.

KELLEY, J. L., [11] *General Topology*, Princeton, Toronto, New York & London 1955.

KOLMOGOROV, A. N., [24] *Foundations of the Theory of Probability*, New York 1956.

KRIPKE, S., [16] *A Completeness Theorem in Modal Logic*. The Journal of Symbolic Logic *24*, 1-14 (1959).

— [20] *Semantical Considerations on Modal Logic*. Acta Philosophica Fennica *16*, 83-94 (1963).

— [21] *Semantical Analysis of Modal Logic, II: Non-normal Modal Propositional Calculi*, in ADDISON, HENKIN, & TARSKI [8].

LEMMON, E. J., [22] *New Foundations for Lewis Modal Systems*, The Journal of Symbolic Logic 22, 176-186 (1957).

MONTAGUE, R., [18] *Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics, and Quantifiers*, Inquiry *4*, 259-269 (1960).

— [27] *Pragmatics and Intensional Logic*, Dialectica (forthcoming).

— [28] *On the Nature of Certain Philosophical Entities*, The Monist (forthcoming).

MONTAGUE, R., SCOTT, D. S., & TARSKI, A., [12] *An Axiomatic Approach to Set Theory*, Amsterdam (forthcoming).

MORRIS, C. W., [1] *Foundations of the Theory of Signs*, Chicago 1938.

Prior, A. N., [25] *Past, Present, and Future*, Oxford 1967.

— [26] *Time and Modality*, Oxford 1957.

Quine, W. V., [9] *From a Logical Point of View*, Cabridge 1953.

Rasiowa, H., & Sikorski, R., [23] *The Mathematics of Metamathematics*, Warsaw 1963.

Tarski, A., [2] *Über einige fundamentale Begriffe der Metamathematik*, Comptes Rendus des Séances de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III *23*, 22-29 (1930). English translation in Tarski [29].

— [3] *Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften, I*, Monatshefte für Mathematik und Physik *37*, 361-404 (1930). English transaltion in Tarski [29].

— [4] *Grundzüge des Systemenkalküls*, Fundamenta Mathematicae *25*, 503-526 (1935); *26*, 283-301 (1936). English translation in Tarski [29].

— [7] *Pojecie prawdy w jezykach nauke dedukcyjnych* [The concept of truth in the languages of the deductive sciences], Travaux de la Société des Sciences et des Lettres de Varsovie, Classe III *34* (1933).-English translation in Tarski [29].

— [29] *Logic, Semantics, Metamathematics*, (J. H. Woodger, translator), Oxford 1956.