Quelles pratiques didactiques à propos des formules trigonométriques à l'aune de la généralisation des TICE ?

MOHAMED BAHRA[1], AOUATIF NAJOUA[2], JALILA ACHOUAQ AAZIM[3]

[1]Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation de Casablanca
[2]École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique Université Hassan II-Mohammedia
[3]École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Université Mohamed V-Rabat
Maroc
mohamed.bahra@gmail.com
aouatif.najoua@gmail.com
azimjalila@gmail.com

RÉSUMÉ
Dès le primaire, via la manipulation et la structuration selon des règles de regroupement spécifiques d'objets individués, les élèves sont initiés au calcul à la main et aux techniques des quatre opérations arithmétiques. Le langage des formules arithmétiques s'en trouve ainsi plus ou moins bien assimilé avant l'entrée au collège. Par contre, le langage des formules trigonométriques n'a pas bénéficié de la même attention de la part des pratiques didactiques. Tout se passe comme si le type de calcul privilégié par ces pratiques est celui qui, pour le dérouler, ne nécessite pas de s'appuyer sur quelque modèle géométrique. Dans cette recherche nous tentons de montrer comment les TICE rendent disponibles des modèles géométriques grâce auxquels il devient possible d'introduire très tôt dans le cursus scolaire des calculs jusqu'ici destinés uniquement aux étudiants des sections à grande teneur mathématiques, notamment le calcul établissant les formules trigonométriques.

MOTS-CLÉS
Pratique didactique, formules trigonométriques, TICE

ABSTRACT
Via manipulation and structuring according to specific rules of the grouping of individual objects, pupils at primary school are introduced to calculation by means of their hands as well as the techniques of the four arithmetic operations. The language of arithmetic formulas is more or less well assimilated before they reach middle school. Nevertheless, the language of trigonometric formulas has not benefited from the same attention of teaching practices. It is as if the type of calculations favoured by these practices is the one that does not need to focus on some geometrical models. In this research investigation, we try to show how Information and Communication Technology (ICT) makes geometrical models available for pupils who are introduced to calculations in their school programs at an early age. These calculations have so far been intended only for pupils belonging to sections with more developed mathematical content, especially the calculation establishing the trigonometric formulas.

KEYWORDS
Teaching practices, trigonometric formulas, ICT

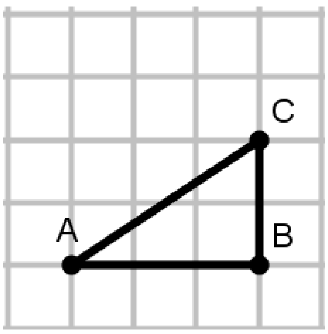
CONTEXTE DE LA RECHERCHE : POSER ET EFFECTUER L'ADDITION DE DEUX ANGLES VIA DES LOGICIELS DE GÉOMÉTRIE DYNAMIQUE, UN SAVOIR CRUCIAL ?

Poser l'addition de deux angles

Les logiciels de géométrie dynamique, à l'instar du CABRIGEOMETRE ou GEOGEBRA, ouvrent des perspectives intéressantes pour l'enseignement. Ainsi, apparait-il, grâce à ces logiciels, que le langage des formules trigonométriques continue de souffrir d'inintelligibilité pour les élèves du secondaire, et même pour des étudiants des sections à grande teneur en mathématiques dans le supérieur, l'enseignement pourrait manquer d'assise et de préparation dans l'enseignement primaire.

Représenter des demi-droites animées d'un mouvement de rotation autour d'un point semble être quelque chose d'anodin. En fait, ce caractère se dissipe vite quand on sait que ce mouvement peut être obtenu en mettant dans l'état d'animation des points de triangles rectangles : étant donné un point mobile parcourant successivement, dans le sens horaire ou dans le sens antihoraire, les 3 côtés d'un triangle rectangle, la demi-droite passant par ce point et d'origine un des trois sommets du triangle balaye l'angle dont c'est le sommet. L'on peut représenter des angles, en tant que balayages de parties du plan, par des couples de nombres entiers : considérons un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit admettent une partie aliquote commune portée un nombre entier de fois m sur l'un et un nombre entier de fois n sur l'autre. L'expression $n \rightarrow m\uparrow$ peut représenter complétement l'angle balayé par la demi-droite définie ci-dessus et d'origine le sommet ayant comme côté opposé le côté sur lequel la partie aliquote est portée m fois. Ainsi l'expression $3 \rightarrow 2\uparrow$ exprime l'angle balayée par la demi-droite [AM] quand M parcourt les côtés d'un triangle ABC rectangle en B dans lequel les côtés [AB] et [BC] admettent une partie aliquote commune portée 3 fois sur le côté [AB] et 2 fois sur le côté [BC] semblablement au triangle de la figure 1 ci-dessous.

FIGURE 1



arctan 2/3

Tous les angles obtenus de cette manière sont superposables et ce, quel que soit la longueur de la partie aliquote commune choisie pour la construction des deux côtés de l'angle droit. Aussi, est-il loisible de noter tout angle ainsi construit en usant du rapport ***m/n.***

Nous convenons de noter un tel angle par ***'arctan(m/n)'*** si le sens du balayage de l'angle par la demi-droite est le sens antihoraire et par ***' - arctan(m/n)'*** si ce sens est le sens horaire. Cette convention renvoie bien sûr à la notation ***'arctan(x)'*** qui se lit 'arctangente de *x*' et qui, elle-même, renvoie à la 'fonction inverse de la fonction tangente. Cette notation et cette fonction ne figurent que dans le programme de mathématique de la dernière année du lycée pour les classes dont les élèves se destinent aux filières à grande teneur mathématiques.

Mais, nous tenons à montrer ici l'intérêt qu'il y a à ce que la notation ***arctan(m/n)*** soit prise, depuis le collège au moins, avec son renvoi à l'angle que nous associons ci-dessus à l'expression $n \to m\uparrow$. Remarquons que cette expression est déjà en vigueur dans les toutes premières années du primaire : au chapitre intitulé Déplacement sur le Quadrillage, le point B noté B = (A ; $n \to 0\uparrow$) et le point $C = (A, n \to m\uparrow)$, m et n deux entiers naturels donnés**,** sont les deux points qu'on obtient à partir du point A en appliquant respectivement les déplacements dont les codes sont $n \to 0\uparrow$ **et** $n \to m\uparrow$ (pour retrouver le point C, partant du point A, se déplacer de n carreaux 'horizontalement' puis de m carreaux verticalement). Remarquons aussi qu'avec le logiciel GEOGEBRA si les points A, B et C sont construits dans cet ordre respectivement selon les codes $n \to 0\uparrow$ **et** $n \to m\uparrow$ (B à droite de A, C au-dessus de B et on écrit $B = (A\ ;\ n \to 0\uparrow)$ et $C = (A\ ;\ n \to m\uparrow)$) alors, une fois mis à l'état d'animation, un point M sur le pourtour du triangle ***ABC*** parcourt ce dernier dans le sens contraire des aiguilles d'une montre. Dans ce cas, le balayage de l'angle de sommet A dans le triangle ***ABC*** par la demi-droite **[*AM*)** est l'angle à légender par l'expression ***'arctan(m/n)'.*** Par contre, pour le triangle ***ABC'*** avec $C'=(A, n \to m\downarrow)$, un point M', pris dans le pourtour du triangle, quand il est mis à l'état d'animation parcourt ce pourtour dans le sens des aiguilles d'une montre et, dans ce cas, le balayage de l'angle de sommet A dans le triangle ***ABC'*** par la demi-droite ***[AM')*** est l'angle à légender par l'expression « ***- arctan(m/n)*** ».

C'est une lapalissade de dire que le rapporteur est un outil génial et que s'en servir fait partie des apprentissages fondamentaux comme la lecture, l'écriture et le calcul mental, surtout quand il s'agit de mesurer un angle, additionner un angle à un autre, quand les mesures de ces deux angles sont données, ou pour soustraire un angle d'un autre.

En fait, ces opérations s'effectuent, via le rapporteur, non pas sur les angles proprement dits mais sur des secteurs circulaires, bouts des angles impliqués. Nous proposons ceci : au lieu d'opérer sur les angles via ces bouts circulaires, il faut y opérer via des bouts sous forme de triangles rectangles. Comme ça il devient possible d'étendre à ces opérations sur les angles des opérations sur les codes «$(A\ ;\ n \to m\uparrow)$» et «$(A, n \to m\downarrow)$» et, conséquemment, sur les expressions ***« arctan(m/n)» et « -arctan(m/n) »*** en tant que sténogrammes des balayages, indiqués ci-dessus, de l'angle de sommet A, respectivement, dans les triangles ***ABC*** et ***ABC'***, avec $B = (A\ ;\ n \to 0\uparrow)$, $C= (A\ ;\ n \to m\uparrow)$ et $C'=(A, n \to m\downarrow)$.

Nous proposons de mettre à profit, pour cette extension, le choix libre de la partie aliquote commune aux côtés de l'angle droit susmentionnée en choisissant pour cette dernière l'hypoténuse [***AC***] quand il s'agit de construire sur cette hypoténuse un triangle ***AB''C''***, rectangle en **B''** (***B''*** un point de la demi-droite **[*AC*)**), de façon à prolonger le balayage « ***arctan(m/n)***» de l'angle de sommet A dans le triangle ***ABC*** par le balayage ***« arctan(p/q)*** » de l'angle de même sommet sur le triangle ***AB''C''*** (***m, n, p* et *q*** des entiers naturels non nuls).

Pour construire le triangle ***AB''C''*** en vue de ce prolongement, il suffit de procéder récursivement en construisant successivement les points suivants : Posons $A_0 = A$ et $A_1 = C = (A_0\ ;\ n \to m\uparrow)$. En plus des points A_0 et A_1, on considère les points :

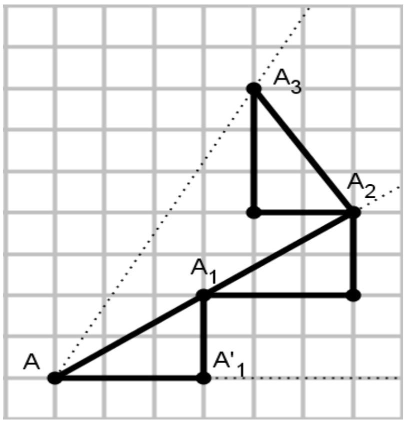
$A_2 = (A_1\ ;\ n \to m\uparrow), \ldots, A_q=(A_{q-1}\ ;\ n \to m\uparrow), A_{q+1}=(A_q\ ;\ m \leftarrow n\uparrow), \ldots$ et $A_{q+p}=(A_{q+p-1}\ ;\ m \leftarrow n\uparrow)$.
On a alors $B''=A_q$ et $C''= A_{q+p}$.

Pour prolonger le balayage ***« arctan(m/n)»*** de l'angle de sommet A dans le triangle ***ABC*** par le balayage ***« - arctan(p/q) »*** de l'angle de même sommet sur le triangle ***AB''C'''***, nous proposons la construction des points suivants : en plus des ***points*** $A_0, A_1, A_2 = (A_1\ ;\ n \to m\uparrow), \ldots$, ***et*** A_q définis précédemment, on considère les points suivants : $A'_{q+1}=(A_q\ ;\ m \to n\downarrow), \ldots$ ***et*** $A'_{q+p}=(A'_{q+p-1}\ ;\ m \to n\downarrow)$.
On a alors $C'''= A'_{p+q}$.

Le premier balayage prolongé peut être noté ***« arctan(m/n) + arctan(p/q) »***, quant au second il peut être noté soit ***« arctan(m/n) + (-arctan(p/q)) »*** soit ***« arctan(m/n) - arctan(p/q) »***.

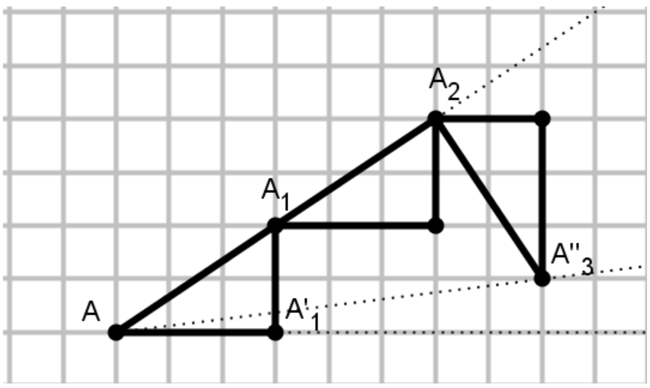
Donnons comme illustration de ces balayages ceux dont les tracés sont ***« arctan(2/3) + arctan(1/2) »*** dans la figure 1 et ***« arctan(2/3)+(-arctan(1/2) »*** dans la figure 3.

FIGURE 2



« arctan(2/3)+ arctan(1/2) »

FIGURE 3



« arctan(2/3)+(- arctan(1/2)) »

En nous appuyant sur ce qui précède, à partir des deux couples ***(m,n)*** et ***(p,q)*** d'entiers naturels non nuls, trouver, quand c'est possible, le couple ***(r,s)*** d'entiers naturels tel que le point ***C''*** défini ci-dessus soit tel que ***C''= (A ; s → r↑) ou C''= (A ; s← r↑),*** c'est trouver le couple ***(r,s),*** quand c'est possible, tel que : ***arctan(m/n) + arctan(p/q) = arctan(r/s)***.

Ainsi, dans les triangles rectangles ***ABC,*** rectangles en ***B*** et dont les côtés ***[AB]*** et ***[BC]*** admettent une partie aliquote commune qu'on peut porter un nombre entier de fois sur l'un et un nombre entier de fois sur l'autre :

- poser l'opération d'addition de deux angles consiste en la construction, déroulée ci-dessus, du point ***C''*** ;
- effectuer cette opération consiste en le calcul du couple ***(r,s)*** des nombres ***r*** et ***s*** que nous allons à présent dérouler dans le paragraphe qui suit.

Effectuer l'addition posée de deux angles

Ayant $\boldsymbol{A_0 = A}$, $\boldsymbol{A_1 = (A_0\,;\, n \to m \uparrow)}$, $\boldsymbol{A_2 = (A_1\,;\, n \to m \uparrow)}$, …, $\boldsymbol{A_q = (A_{q-1}\,;\, n \to m \uparrow)}$, en comptant les indices, il est clair que $\boldsymbol{A_q = (A\,;\, qn \to qm \uparrow)}$. En outre, ayant $\boldsymbol{A_{q+1} = (A_q\,;\, m \leftarrow n \uparrow)}$, … et $\boldsymbol{A_{q+p} = (A_{q+p-1}\,;\, m \leftarrow n \uparrow)}$, en comptant encore les indices on trouve : $\boldsymbol{A_{q+p} = (A_q;\, pm \leftarrow pn \uparrow)}$.

Ainsi a-t-on : $\boldsymbol{A_q = (A\,;\, qn \to qm \uparrow)}$ et $\boldsymbol{A_{q+p} = (A_q;\, pm \leftarrow pn \uparrow)}$, on en déduit que :

$$\begin{cases} \boldsymbol{A_{q+p}} = (\boldsymbol{A};\ (\boldsymbol{qn - pm}) \to (\boldsymbol{qm + pn}) \uparrow) \text{ si } \boldsymbol{qn} > pm \\ \boldsymbol{A_{p+q}} = (\boldsymbol{A};\ (\boldsymbol{qm + pn}) \uparrow) \textbf{ si } \boldsymbol{qm = pn} \\ \boldsymbol{A_{p+q}} = (\boldsymbol{A};\ (\boldsymbol{pm - qn}) \leftarrow (\boldsymbol{qm + pn}) \uparrow) \textbf{ si } \boldsymbol{qn} < pm \end{cases}$$

Comme $\boldsymbol{C'' = A_{p+q}}$, on a : $\boldsymbol{r = qm + pn}$ et :

- si $\boldsymbol{qn} > pm$ alors $\boldsymbol{r = qn - pm}$ et $\boldsymbol{C'' = (A\,;\, s \to r \uparrow)}$;
- si $\boldsymbol{qn = pm}$ alors $\boldsymbol{C'' = (A\,;\, r \uparrow)}$;
- si $\boldsymbol{qn < pm}$ alors $\boldsymbol{r = pm - qn}$ et $\boldsymbol{C'' = (A\,;\, s \leftarrow r \uparrow)}$.

Problématique de la recherche : L'équation fondamentale des formules trigonométriques, un point aveugle des systèmes d'enseignement des mathématiques ?

La construction du point $\boldsymbol{C''}$ et le calcul de ses « coordonnées par déplacement sur quadrillage à partir du point A » peuvent avoir comme sténogrammes les expressions suivantes :

$$\begin{cases} arctan\left(\frac{m}{n}\right) + arctan\left(\frac{p}{q}\right) = arctan\left(\frac{qm + pn}{qn - pm}\right) \ si\ qn > pm. \\ arctan\left(\frac{m}{n}\right) + arctan\left(\frac{q}{p}\right) = 90^\circ \ \ siqn = pm. \\ arctan\left(\frac{m}{n}\right) + arctan\left(\frac{p}{q}\right) = 180^\circ - arctan\left(\frac{qm + pn}{pm - qn}\right) siqn < pm \end{cases}$$

Associés qu'ils sont aux activités du déplacement sur quadrillage, il est curieux de constater que les sténogrammes ci-dessus n'apparaissent pas, en tant que tels et sous cette forme, à aucun moment de l'histoire de l'Ecole et du Lycée, dans aucun manuel scolaire. Il est curieux de constater qu'ils n'apparaissent pas, non plus, en tant que tels et sous cette forme, dans aucun programme officiel des mathématiques et dans aucun Bulletin Officiel à propos de ce programme pour quelque niveau d'enseignement que ce soit.

Cette absence atteste que la construction du point $\boldsymbol{C''}$ et le calcul, comme déroulé ci-dessus, de ses « coordonnés », constituent deux points aveugles des contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour du déplacement sur quadrillage et autour de son prolongement naturel, le repérage des points par leurs coordonnées rectangulaires.

Le sort ainsi réservé par les systèmes d'enseignement des mathématiques à cette construction et à ce calcul pourrait avoir comme explication l'absence du contexte idoine à leur introduction. En effet, il n'est pas possible, rien qu'en s'appuyant sur des figures figées, de faire des angles l'objet de cette composition, de ce calcul et de cette caractérisation par des nombres rationnels que nous venons de dérouler, et de le faire assez tôt dans le cursus scolaire des enfants. Pour cela, il est nécessaire que le milieu puisse permettre de représenter et de concevoir les angles comme les parties du plan balayées par des demi-droites [AM), M parcourant, dans un sens ou dans l'autre, le côté [BC] d'un triangle ABC rectangle en B. En effet, pour les enfants, se représenter l'animation du point M ainsi que la trace de la demi-droite [AM) est primordial pour que le problème suivant puisse faire sens pour eux, nous intitulons ce problème, le problème fondamental de la trigonométrie.

Le problème fondamental de la trigonométrie

Étant donnés deux angles associés à deux triangles rectangles dont les sommets sont sur des nœuds d'un quadrillage, comment construire à partir de ces triangles, par un déplacement sur quadrillage à partir d'un de ses nœuds A, les sommets B et C du triangle ABC rectangle en B et dont l'angle de sommet A admet comme recouvrement deux angles contigus superposables aux deux angles donnés.

Ce problème est fondamental quant à l'introduction de la trigonométrie car non seulement il fait pendant au « comment poser et effectuer l'addition de deux angles », il rend aussi ce comment une technique qui, en plus d'être analogue à la technique du « comment poser et effectuer l'addition de deux nombres », constitue une voie intéressante pour l'introduction, dès le collège, de la trigonométrie, voire de l'établissement des formules trigonométriques. En effet :

- En mathématiques, au début de l'enseignement supérieur***, m, n, p et q*** étant des nombres entiers non nuls donnés**,** on sait qu'à partir de la formule relative à l'équation à deux inconnus ***r*** et ***s « arctan(m/n) + arctan(p/q) = arctan(r/s) »*** on peut tirer toutes les identités trigonométriques. Il y a donc lieu de qualifier cette équation d'équation fondamentale de la trigonométrie. Cette grande importance de cette équation rejaillit sur le calcul, déroulé ci-dessus, des entiers ***r*** et ***s.***
- Les enfants de 10-11 ans, en tant qu'ils sont les élèves auxquels s'adresse le calcul algébrique sur des expressions numériques littérales à leur arrivée au collège, doivent établir ce calcul dans sa forme littérale sur des entiers ***m, n, p*** et ***q***. Mais avant ils doivent être initiés à 'poser l'opération d'addition de deux angles' via la construction d'exemples de point ***C''.***
- Les enfants de 6-7 ans, en tant qu'ils sont les élèves à qui sont adressés, dès la première année de l'école au primaire, les activités intitulées 'Déplacement sur Quadrillage', doivent être initié à 'poser l'opération d'addition de deux angles' via la construction d'exemples de point ***C''*** et à calculer, sur des exemples, les composantes ***r*** et ***s*** des « coordonnées » ***(r,s)*** de ce point. Rappelons que les activités intitulées 'Déplacement sur Quadrillage' s'articulent autour du codage et décodage de chemins polygonaux sur un quadrillage selon le code basé sur les expressions ***« m→n↑» « m→n↓», « m←n↑» et « m←n↓»*** introduites ci-dessus.

Ainsi, la construction du point ***C''*** et le calcul du couple ***(r,s),*** en guise de coordonnées de ce point, paraissent être ignorés des pratiques didactiques malgré le fait que cette construction et ce calcul puissent faire sens pour les enfants quand ceux-ci s'initient aux calculs sur les nombres et au repérage des points sur une feuille de papier à carreaux.

En déroulant cette construction et ce calcul, nous avons tenté :

- de montrer qu'ils sont le prolongement naturel des activités relatives à l'objet d'enseignement « Déplacement dans le Quadrillage » tout en ayant comme sémantique « comment poser et effectuer l'addition de deux angles dans une perspective d'établissement des identités trigonométriques » ;
- d'établir le fait suivant : quand le tableau noir était l'unique médium, cette construction et ce calcul, difficiles à illustrer facilement sauf via des configurations dynamiques et articulées de points, peuvent s'avérer difficiles à enseigner pour les enfants de 10-11 ans et moins.
- de montrer que cette difficulté d'enseignement est irrecevable en tant qu'argument en faveur du choix didactique qui consiste à laisser cette construction et ce calcul dans l'ombre le long de la scolarité obligatoire et même au-delà. En effet, le remplacement, grâce notamment aux TICE, du tableau noir par des écrans qui peuvent recevoir des systèmes dynamiques contenant, comme virtualités mathématiques, ce genre de

constructions, de calculs et de sémantiques, tout en rendant possible la manipulation et la prospection de ces même virtualités par les enfants, rend un tel argument parfaitement caduque.

CADRE THÉORIQUE ET QUESTIONS DE RECHERCHE

Cadre théorique

Présentant le concept *d'organisation praxéologique* comme un des fondements sur lesquels repose sa théorie, qu'il intitule *la théorie anthropologique du didactique*, Chevallard (1997) écrit notamment : *« ... on tient ici pour un postulat que toute action humaine procède d'une praxéologie, en admettant bien sûr que cette praxéologie puisse être en cours d'élaboration, ou, aussi bien, que sa construction se soit arrêtée -peut-être définitivement, à l'échelle d'une vie humaine ou institutionnelle, en la figeant dans un état d'incomplétude ou de sous-développement, avec, par exemple, un type de tâches mal identifié, une technique à peine ébauchée, une technologie incertaine, une théorie inexistante ».*

Si l'opération qui consiste à poser et effectuer l'addition de deux angles, telle que présentée ci-dessus, est une opération qui ne peut faire sens dans le milieu scolaire sans qu'elle prenne place au sein d'une organisation praxéologique spécifique, il est important de chercher à connaître l'état dans lequel les pratiques scolaires auraient figé cette organisation : serait-ce cet état d'incomplétude, décrit dans la citation ci-dessus de Chevallard ? Un état de sous-développement, constitué autour de tâches mal identifiées, d'une technique à peine ébauchée, d'une technologie incertaine et d'une théorie inexistante ?

Pour qu'elle soit complétement admise, la réponse par l'affirmative à la question ci-dessus doit être fondée sur l'identification, la complétion, l'affirmation et la formulation, respectivement, des tâches, de la technique, de la technologie et de la théorie constitutives de l'organisation praxéologique en question. La taille que cet article doit prendre ne nous permet pas de développer ici tout cela. Nous estimons convenable de chercher à appréhender l'état d'incomplétude dans lequel les pratiques scolaires figent la caractérisation d'angles par des nombres rationnels à travers l'examen de performances d'étudiants en décomposition de l'angle plat, de l'angle droit, de l'angle de 45° et la caractérisation de ces décomposition par des suites finies de nombres rationnels.

Ces performances pourraient révéler aussi l'état d'incomplétude dans lequel les pratiques didactiques figent le *modèle implicite d'action* relatif à l'établissement par l'élève, en tant qu'actant, des formules trigonométrique. Rappelons qu'en Théorie des Situations Didactique en Mathématiques (T.S.D.M.) (Brousseau, 1998) :

« Un Modèle implicite d'action est une représentation simplifiée mais suffisante de la façon dont une connaissance sous une forme particulière (ex. théorème en acte...) peut déterminer les comportements d'un actant dans une situation donnée. Cette représentation du fonctionnement des connaissances dans les décisions, suivant leur validité et leur utilité dans des circonstances précises est l'instrument fondamental de la T.S.D.M. comme épistémologie expérimentale.»

Questions de recherche

Nous postulons que la caractérisation d'angles et de sommation d'angles par des rationnels est une technique qui fonde l'établissement des formules trigonométriques. Cette caractérisation passe par la construction dans le quadrillage de configurations de triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit admettent un carreau comme partie aliquote commune. Ces configurations peuvent se sténographier par des expressions qui s'articule autour des mots de la forme ***'arctan(m/n)'***. Nous postulons que l'établissement par l'élève du langage en question fait partie de ces techniques qui fondent le système d'enseignement des sciences et des techniques.

Dire que les pratiques didactiques figent dans l'état d'à peine ébauchée la caractérisation d'angles sous-entend que ces pratiques fonctionnent sous l'Hypothèse H suivante : l'élève, devenu étudiant, peut, à terme et spontanément, mettre sur pied le déploiement de cette ébauche en la technique sous-jacente qu'il étend à son domaine de validité en entier sans restriction aucune. Précisons que cet état comprend les notions enseignées d'angle, de mesure d'angles, de tangente, de cosinus et de sinus sous la forme d'objets d'apprentissages que ces notions prennent dans la scolarité obligatoire.

Deux questions s'imposent alors à nous :

a. Cette hypothèse, est-elle une hypothèse erronée ?
b. Est-ce que les pratiques didactiques fonctionnent réellement sous cette hypothèse ?

MÉTHODOLOGIE

Comme mentionné dans le cadre théorique de cette recherche et précisé dans les questions qui la fondent, il s'agit d'examiner les performances d'étudiants dans un domaine particulier : le domaine de la décomposition de l'angle plat, de l'angle droit, de l'angle de 45° en sommes d'angles caractérisables par des rapports des côtes des angles droits de triangles rectangles. Cette méthodologie repose sur l'idée suivante :

Décomposer 180, 90 ou 45 en une somme de 2, 3, 4 ou 5 nombres entiers est une pratique que tout enfant de 7-8 ans se doit de maîtriser. Mais qu'en est-il de la décomposition d'un angle de 180°, 90° ou de 45° en sommes d'angles remarquables, ceux notamment caractérisables par des rationnels ? Aussi, la méthodologie va-t-elle s'articuler autour de deux points essentiels :

- montrer que, dans un certain contexte, la deuxième décomposition n'est pas plus difficile que la première ;
- placer un premier groupe d'étudiants devant la caractérisation suivante d'un angle aigu : la caractérisation se fait par l'identification des triangles rectangles homothétiques et dont le rapport d'homothétie est connu (l'angle est caractérisé par ce rapport) : il s'agit de triangles rectangles dont les rapports des côtés de l'angle droit sont égaux à une constante déterminée (la tangente de l'angle). Avec cette caractérisation l'angle est noté ***arctan(k)*** si ***k*** est le rapport d'homothétie. On se limite aux cas où k est un nombre rationnel. On s'intéresse alors à la caractérisation, selon le même principe, d'angles obtenus par composition d'angles déjà caractérisés ou par la décomposition d'un angle en plusieurs angles caractérisables de la même façon. Ces mêmes étudiants sont placés devant des configurations de recouvrements, via cette même technique de composition/ décomposition de l'angle droit, de l'angle plat et de l'angle de 45°. Il leur est demandé de compléter la description de ces mêmes recouvrements dans le formalisme employant la notation ***arctan(k)*** selon le principe décrit ci-dessus;
- placer un second groupe d'étudiants, au même profil que le premier, dans la même situation que celui-ci mais avec une des configurations de ces composition/ décomposition de l'angle droit accompagnée de sa description dans le formalisme employant la notation ***arctan(k)*** ; cette description leur est donnée comme exemple de réponse à suivre pour les autres configurations.

Nous estimons que les étudiants incapables de reconnaître ces recouvrements de ces angles et de les décrire dans le formalisme en question manifesteraient le besoin, dans lequel le système d'enseignement des sciences et des techniques se trouverait, d'ériger l'opération « poser et effectuer géométriquement l'addition de deux angles » au rang de l'objet d'apprentissage à part entière.

Ainsi, si une grande proportion des étudiants du premier groupe a tendance à confirmer ce besoin alors deux éventualités entrent en lice :

- la première éventualité est que la posture qui consiste à être informé de l'exemple à suivre implique, au sens de l'Analyse Statistique Implicative (i.e. test statistique de Gras, (1995)), 'réussir à décrire les configurations des autres recouvrements' ;
- la seconde éventualité est que cette posture n'implique pas cette réussite.

S'il s'avère que c'est la première éventualité qui est attestée comme décrivant l'état réel du rapport des étudiants avec les recouvrements en question et leur description alors, bien qu'on puisse affirmer que les pratiques didactiques fonctionnent sous l'hypothèse H, on ne peut ni confirmer ni infirmer la véracité de cette hypothèse. Cependant, le devoir de vigilance auquel nous sommes astreints, en tant que chercheurs dans le domaine de l'éducation et en tant que partie prenante dans le système éducatif, nous incombe à infirmer cette véracité.

S'il s'avère que c'est la seconde éventualité qui est attestée comme décrivant l'état en question, alors on peut affirmer que, non seulement les pratiques didactiques fonctionnent selon l'hypothèse H, mais que cette hypothèse est une hypothèse erronée. Rappelons que l'hypothèse H stipule que l'élève, devenu étudiant, peut, à terme et spontanément, mettre sur pied le déploiement en la technique sous-jacente, qu'il étend à son domaine de validité en entier sans restriction aucune, de l'état d'à peine ébauchée dans lequel les pratiques didactique figent la caractérisation d'angles. Cet état comprend les notions enseignées d'angle, de mesure d'angles, de tangente, de cosinus et de sinus sous la forme d'objets d'apprentissages que ces notions prennent dans la scolarité obligatoire.

PARTIE EMPIRIQUE, ANALYSE DES RÉSULTATS

Partie empirique

Le test s'articule autour d'une action A que l'étudiant devrait accomplir suite à la satisfaction par le milieu, avec lequel il interagit, d'une condition C. Voici la condition :

Condition C

Une famille $(T_i)_{1\leq i\leq r}$ formée de r triangles rectangles étant affichée et est telle que ces triangles :

- ont toutes un sommet commun A qui n'est pas le sommet d'aucun des angles droits des triangles de la famille ;
- couvrent une partie du plan dont ils constituent une partition, laquelle partie est limitée par un polygone P convexe ;
- pour tout i, tel que $1\leq i\leq r$, dans le triangle rectangle T_i le côté adjacent de l'angle de sommet A et le côté opposé admettent une partie aliquote commune portée un nombre entier de fois n_i sur le côté adjacent et un nombre entier de fois m_i sur l'autre côté opposé.

Action A

- Retracer le polygone P ;
- Poser $\widehat{A}$ l'angle de sommet A dans le polygone P ;
- Légender l'angle $\widehat{A}$ par l'expression **(e)** suivante :

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{artan}\left(\frac{\boldsymbol{m_1}}{\boldsymbol{n_1}}\right) + \boldsymbol{artan}\left(\frac{\boldsymbol{m_2}}{\boldsymbol{n_2}}\right) + \cdots + \boldsymbol{artan}\left(\frac{\boldsymbol{m_r}}{\boldsymbol{n_r}}\right) ;$$

- Si la mesure de $\hat{A}$ est 180°, 90° ou 45°, remplacer $\hat{A}$, dans l'expression (e), par sa mesure, en radian ou en degré.

Description précise du test et caractérisation de la population testée

Nous avons soumis deux groupes de 50 étudiants chacun à un test. Chacun de ces étudiants possède soit le baccalauréat type « Sciences Mathématiques A ou B» soit le baccalauréat type « Sciences Physiques ».

Le test (l'énoncé du test est en annexe) consiste à exposer ces étudiants à des 'montages' de triangles rectangles. Chaque montage est une famille de triangles $(AB_iC_i)_{0\leq i\leq n}$, avec $n \geq 1$ telle que, pour tout $i, 0 \leq i \leq n$:

- les sommets A, B_i et C_i, sont des nœuds d'un quadrillage du plan ;
- B_{i+1} est un point de $]AC_i]$;
- le triangle AB_iC_i est rectangle soit B_i soit en C_i;
- dans le triangle AB_iC_i, les deux côtés de l'angle droit admettent une partie aliquote commune explicite portée un nombre entier de fois sur l'un et un nombre entier de fois sur l'autre ;
- le sommet C_n est tel que la mesure de l'angle $\left(\widehat{[AB_0),[AC_n)}\right)$ est 45°, 90° ou 180° ou que les côtés$[AC']$ et $[C_nC']$ admettent une partie aliquote commune, facilement identifiable, et est portée un nombre entier de fois sur l'un et un nombre entier de fois sur l'autre.

Ainsi, chacun de ces 'montages' de triangles rectangles est une réalisation d'un des théorèmes de la forme :

$$\boldsymbol{\sum_{i=0}^{i=n} \arctan(a_i) = 45° \quad ,90° \quad ,180° \quad \text{ou} \arctan(\frac{n}{m})},$$

avec $a_i = \frac{n_i}{m_i}$, n_i étant le nombre de fois que la partie aliquote commune aux côtés de l'angle droit du triangle AB_iC_i est porté sur le côté opposé au sommet A et m_i le nombre de fois que cette partie est portée sur le côté adjacent à ce sommet. n et m des nombres entiers déterminés.

Pour un des deux groupes d'étudiants, aucun des montages de triangles rectangles $(AB_iC_i)_{0\leq i\leq n}$ n'est accompagné du théorème qu'il réalise. Pour l'autre groupe un de ces montages est accompagné du théorème qu'il réalise. Il s'agit pour chacun des étudiants testés de retrouver pour chacun des montages le théorème que ce montage réalise.

Analyse des résultats et conclusion de la deuxième partie

Méthode d'analyse

Nous estimons que la constitution des deux groupes permet de considérer les propositions p et q suivantes :

- p : être informé du théorème que réalise un des montages ;
- q : réussir à légender, par le théorème qu'il réalise, au moins un des montages non déjà légendés.

Il s'agit alors de dresser le tableau de contingence défini comme suit (voir tableau 1) : n, le nombre total des étudiants testés (ici 100 étudiants), n_{pq} le nombre des étudiants vérifiant à la fois p et q (ici 20 étudiants), $n_{p\bar{q}}$, le nombre des étudiants à la fois p et non(q) (ici 30 étudiants), $n_{\bar{p}q}$, le nombre des étudiants à la fois non(p) et q (ici 0 étudiant) et $n_{\bar{p}\bar{q}}$, le nombre des étudiants à la fois non(p) et non(q) (ici 50 étudiants).

TABLEAU 1

Tableau de contingence relatif au Test statistique d'implication de Gras (1995)

Il s'agit aussi de voir si l'implication p ⇒ q, au sens de Gras, est ou non admissible à un niveau de confiance de plus de 90% (Gras, 1995).

$p \backslash q$	q	$\bar{q}$	Marges
p	n_{pq}	$n_{p\bar{q}}$	n_p
$\bar{p}$	$n_{\bar{p}q}$	$n_{\bar{p}\bar{q}}$	$n - n_p$
Marges	$\mathbf{n_q}$	$\mathbf{n - n_q}$	$\boldsymbol{n}$

En fait, deux cas se présentent :

- Premier cas : $n_p > n_q$

Nous considérons ce cas comme cas de non admission du couple $(p\,;\,q)$ à la soumission à l'analyse statistique implicative car, dans ce cas, l'intensité d'implication, qui est définie par Gras comme étant la qualité d'admissibilité, de $p \Rightarrow q$ non définie.

- Deuxième cas : $n_p \leq n_q$

Nous considérons ce cas comme celui de l'admission du couple $(p\,;\,q)$ à la soumission à l'analyse statistique implicative : En effet, dans ce cas l'intensité d'implication de $p \Rightarrow q$ est une quantité numérique comprise entre 0 et 1, appelé niveau de confiance d'admissibilité de $p \Rightarrow q$ et que l'on calcule à partir d'une statistique proposée par Gras, que l'on nomme indice d'implication de Gras et qui s'exprime sous la forme d'un pourcentage.

Analyse des résultats recueillis (voir tableau 2)

TABLEAU 2

Les résultats obtenus organisés selon le tableau de contingence relatif au test statistique d'implication de Gras (1995)

$p \backslash q$	q	$\bar{q}$	Marges
p	20	30	**50**
$\bar{p}$	00	50	50
Marges	**20**	80	100

Avec ces résultats, on est dans le premier cas de figure : cas de non admission du couple $(p\,;\,q)$ à la soumission à l'analyse statistique implicative.

Les résultats recueillis nous situent dans le deuxième cas de figure, le cas de non admission du couple $(p\,;\,q)$ à la soumission à l'analyse statistique implicative. Or, la construction du point ***C''*** et le calcul du couple ***(r,s)***, présenté ici comme résolution de l'équation fondamentale de la trigonométrie, ou comme solution du problème fondamental de la trigonométrie, sont deux points aveugles des contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour du déplacement sur quadrillage et autour de son prolongement, le système des coordonnées rectangulaires. Rappelons que le couple ***(r,s)*** permet justement de localiser le point C'' et de préparer ainsi l'introduction du système cartésien des coordonnées rectangulaires. On peut alors estimer que les systèmes didactiques, ou que les pratiques didactiques qu'ils subsument, fonctionnent sous l'hypothèse que c'est le deuxième cas de figure qui, spontanément, quoique progressivement, doit prévaloir. Ainsi, tient-on avec ces résultats un argument assez fort en faveur de la conclusion stipulant que ces pratiques fonctionnent bel et bien sous cette hypothèse, mais que celle-ci est une hypothèse erronée.

CONCLUSION

Le calcul sur les balayages de parties du plan par des demi-droites tournant autour de leurs origines A, fixe, et passant par des points M parcourant des segments [BC] ne contenant pas A, est une manière intéressante de faire fonctionner le concept de groupe des rotations. Ce calcul, qui peut faire suite à celui présenté ici en tant que constitutif du contexte même de cette recherche, tient son importance de celle que revêt, en mathématiques, ce concept. Une autre importance de ce calcul lui vient de ses vertus didactiques propres : il permet de faire jouer au repérage des points du plan rapporté à un système de coordonnées rectangulaires un rôle fondamental : l'affermissement du lien entre les rotations et le langage des formules trigonométriques, ce à quoi prépare le calcul présenté ici comme étant le contexte de cette recherche et comme probable point aveugle des systèmes d'enseignement des mathématiques.

En effet, à propos de ce lien, nous avons consacré une grande partie de ce travail à apporter des arguments, plus ou moins factuels, établissant que les pratiques didactiques l'auraient rompu. En fait, ces pratiques auraient provoquées, de manière insoupçonnée d'elles, cette rupture dès les premiers enseignements de la géométrie : en effet, si ces enseignements servent, entre autres choses, à introduire, dès le Cours Préparatoire (CP), le repérage des points du plan en rapportant ce dernier à un système de coordonnées rectangulaires, cela ne peut se réaliser que grâce à des activités, dévolues aux élèves du (CP), sur les déplacements sur quadrillage. C'est justement la voie empruntée par les pratiques didactiques dans ce niveau d'enseignement et dans les niveaux immédiatement supérieurs. Or, comme nous le montrions depuis la description du contexte de cette recherche, cette manière d'introduire ce repérage peut servir aussi à formuler, de manière naturelle et opportune dès ces niveaux, ce que nous présentions comme étant l'équation fondamentale ou le problème fondamental des formules trigonométriques. Mais, force est de constater que les pratiques didactiques dissocient ces activités de la formulation de ce problème et de cette équation et *a fortiori* de la solution du premier et de la résolution de la seconde, aussi bien au primaire qu'au collège et même au lycée.

Or, aussi bien l'extension du repérage à la formulation de ce problème et de cette équation, que la solution et résolution de l'un et de l'autre dès les premiers enseignements de la géométrie, nous ont été suggérées par les logiciels de géométrie dynamique. En outre, s'il est possible de prévoir cette extension et cette solution, en s'appuyant uniquement sur des raisons purement mathématiques, et donc sans faire intervenir ces logiciels, il est, par contre, difficile d'assurer la maniabilité des activités scolaires sous-jacentes sans le recours à ces derniers.

Ainsi, peut-on avancer l'hypothèse selon laquelle c'est la difficulté d'enseignement qui consiste à assurer, dans le milieu scolaire, cette maniabilité qui se serait constituée en obstacle à l'apparition et de cette extension et de la formulation de ce problème et de cette équation parmi les objets d'apprentissage du primaire comme du secondaire.

RÉFÉRENCES

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
Chevallard Y. (1997). *Le concept de rapport au savoir, Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel,* non publié, 25 p.
Gras, R. (1995), L'analyse impli*cative. Introduction. In* R. Gras (éd), *Actes du colloque méthode d'analyse multidimensionnelles en didactique des mathématiques*, IRMAR Rennes et IRESTE Nantes, 129-143.

Annexe

Voici 11 configurations de points :

- Chacune des 6 premières configurations renvoie à l'opération qui consiste à *balayer l'angle Â du triangle rectangle en passant du côté adjacent à Â à l'hypoténuse. Deux sens opposés du balayage entrent en lice : le sens horaire et le sens antihoraire. Le signe (-) est utilisé pour dénoter le sens antihoraire. L'expression à droite de la configuration dénote l'opération seule ou l'opération composée. Deux façons de composer entrent en lice (la composition additive dénotée par + et la composition soustractive dénotée par (-).*
- Chacune des 5 dernières configurations renvoie à une réalisation d'un théorème énonçable en termes d'opérations représentées dans les 6 premières.

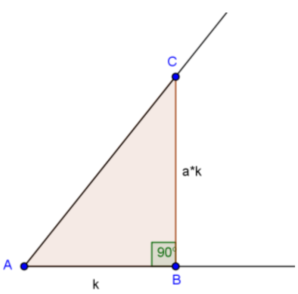
Il s'agit de deviner pour chacune des 5 dernières le théorème auquel elle renvoie.

Travail à faire :

Pour chacune des 5 dernières configurations, écrire, à droite de la configuration, le théorème auquel elle renvoie.

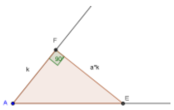
Faire un commentaire à propos de la facilité ou la difficulté à deviner et formuler les 5 théorèmes dans le symbolisme introduit avec les 6 premières configurations.

1.



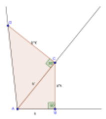
$$\left(\widehat{([AB);[AC)}\right) = \arctan(a)$$

2.



$$\left(\left(\widehat{[AF);[AE)}\right)\right) = -\arctan(a)$$

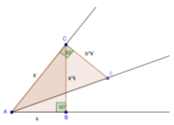
3.



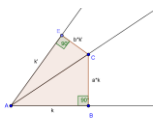
$$\left(\widehat{[AB);[AD)}\right) = \arctan(a) + \arctan(b)$$

4.

$$\left(\widehat{[AB);[AE)}\right) = \arctan(a)\ \ (-\arctan(b))$$

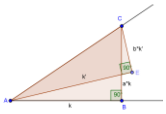


5.



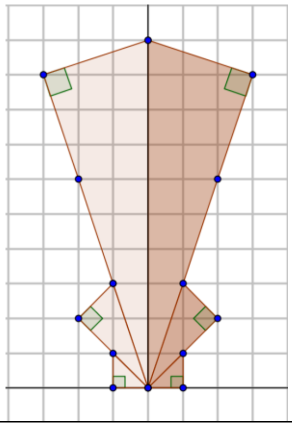
$$\left(\widehat{[AB);[AE)}\right) = \arctan(a) - (-\arctan(b))$$

6.

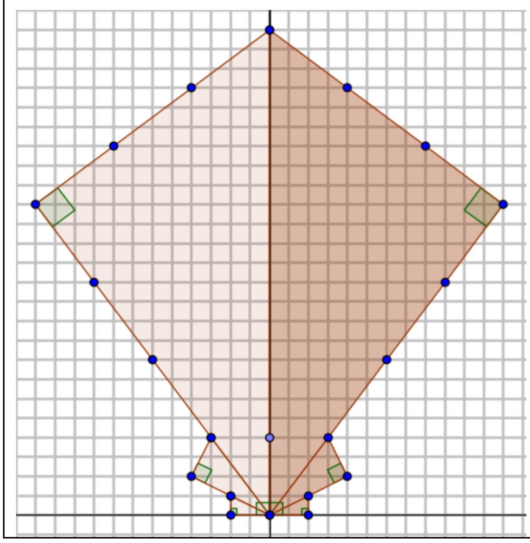


$$\left([\widehat{AB); [AE}]\right) = \arctan(a) - (\arctan(b))$$

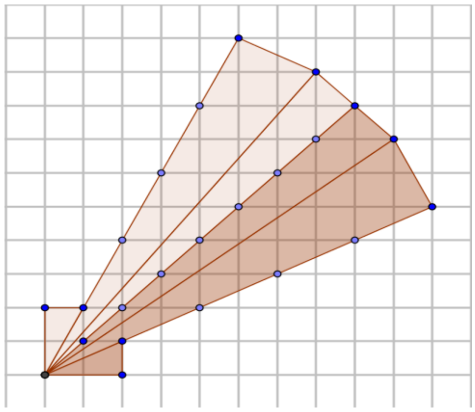
7.



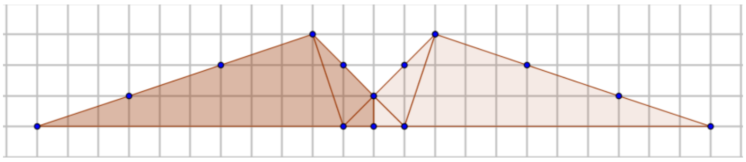
8.



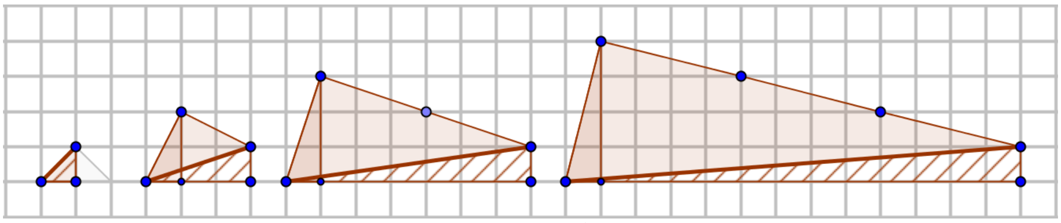
9.



10.



11.



$$arctan(n+1) - arctan(n) = \ arctan(\frac{1}{\qquad\qquad})$$