La nécessité de la mobilisation des variables didactiques spatiotemporelles dès les premiers enseignements de la géométrie

MOHAMED BAHRA[1], JALILA ACHOUAQ AAZIM[2], AOUATIF NAJOUA[3]

[1]Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation de Casablanca
[2]École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique,Université Mohamed V-Rabat
[3]École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique, Université Hassan II-Mohammedia
Maroc
mohamed.bahra@gmail.com
azimjalila@gmail.com
aouatif.najoua@gmail.com

RÉSUMÉ
Dans cet article, nous tentons de montrer en quoi il y a modelage robuste, bien qu'imperceptible par la noosphère, de la structuration des contenus d'enseignement des mathématiques selon un moule qui les vide de leurs teneurs morpho-dynamiques. Ce moule serait dicté par le tableau noir. Des notions très voisines de celles développées à l'adresse de l'élève dans les manuels scolaires sont les vecteurs de cette teneur. Les TIC rendent ces notions assez patentes pour qu'elles soient, depuis longtemps déjà, prises en compte par ces manuels. Toute absence avérée de ces notions parmi les objets d'apprentissages que manuels et monographies promeuvent dans le milieu scolaire est un argument en faveur de la véracité de ce modelage et de son caractère de carcan. Ces objets seraient conçus en fonction des possibilités qu'offre le tableau noir en matière d'activation des variables de commande entre les mains du professeur ; l'animation de points et de configurations de points ne fait pas partie de ces possibilités. À propos de cette animation, l'absence parmi ces objets de la dichotomie fondamentale 'trajectoire/diagramme' à propos des courbes, y compris, parmi ces courbes, celles qui sont des droites, fait que des élèves-ingénieurs n'associent pas la modélisation des mouvements rectilignes à la courbe représentative de la fonction numérique de la variable réelle, ni même, concernant la fonction affine, à la droite.

MOTS-CLÉS
Contenu d'enseignement, tableau noir, morpho-dynamique, non temporalisation des déplacements dans le quadrillage

ABSTRACT
In this article, we attempt to show how there is a strong modeling, although imperceptible by the no-sphere of structuring the educational contents of teaching mathematical content in a mold that emptiness their Morpho-dynamic content. This mold would be dictated by the blackboard : very similar notions of those developed to the student's addresses in the textbooks are the vectors of this content. ICTs are making these concepts quite patent, a very long time ago, taken in consideration by these manuals. Any proven lack of these concepts among the objects of learning as manuals and monographs promotes in schools is an argument for the truthfulness of this modeling and the character of it. These objects would be designed according to the possibilities offered by the blackboard relating to the activation of variable commands between the hands of the professor. The animation and configuration of points are not a part of these opportunities.About this animation, the lack of these objects in

the fundamental dichotomy 'trajectory / chart' concerning curves, including among these curves, those are straight lines, that engineering students not associate with the modeling of rectilinear movements to the graph of the numerical function of the real variable, or even concerning the linear function, to the right.

KEYWORDS
Educational content, blackboard, morpho-dynamics, non temporalization of displacements in the gridlines

PROBLÉMATIQUE ET QUESTIONS FONDAMENTALES DE LA RECHERCHE

Il est des objets mathématiques qui ne s'actualisent qu'à travers des configurations morpho-dynamiques. Or, les mathématiciens peuvent s'accommoder de sténogrammes statiques de ces configurations et faire du tableau noir le support de ces derniers. De leur côté, étant dans la nécessité de recourir à ce support comme principal médium, c'est tout naturellement que les pratiques scolaires auraient tendance à prendre ces sténogrammes pour argent comptant, de sorte que, sans s'en rendre compte, ces pratiques reprendraient à leur compte ces sténogrammes et fonctionneraient sous l'hypothèse erronée selon laquelle, devant ces derniers, les élèves sauraient déchiffrer, directement, le contenu morpho-dynamique qui s'y trouve caché.

Placés dans le contexte des TICE et principalement des logiciels de géométrie dynamique, ces sténogrammes peuvent faire l'objet d'un déploiement à même de livrer enfin et la complexité et le contenu morpho-dynamique qu'ils cachent. Un tel déploiement peut pousser l'hypothèse erronée susmentionnée à se donner à manifestation.

Le 'déplacement sur le quadrillage' est un objet d'enseignement destiné aux élèves du CP, CE1[1] et CE2[2]. Dans les objets d'apprentissage auxquels les pratiques didactiques traditionnelles traduisent cet objet, la notion de durée n'est jamais invoquée. Quand cette notion est abordée, aucune reprise de ses déplacements la leur adjoignant n'est jamais envisagée. Envisager une telle reprise peut donc donner lieu à un déploiement de l'objet d'enseignement 'déplacement sur quadrillage' qui soit à même de dévoiler la complexité qui s'y trouve en attente d'explicitation.

Le recours par les pratiques didactiques d'avant l'avènement des TICE au tableau noir comme médium rend difficile pour elles l'activation des variables spatiotemporelles comme variable de commande. Que ces pratiques n'envisagent pas cette reprise, cela est donc bien compréhensible. Par contre, continuer d'ignorer cette reprise maintenant que les TICE rendent disponible cette activation pourrait s'avérer une décision bien malencontreuse que les pratiques didactiques actuelles auraient prises sans le savoir.

De ce qui précède, deux questions s'imposent :

a. Peut-on faire maîtriser aux élèves du CE2 les déplacements sur quadrillage lorsque ceux-ci sont temporalisés ? Par cette temporalisation nous entendons que ces déplacements sont subordonnés à des intervalles de temps déterminés ?
b. Les étudiants des filières à grande teneur technique et mathématique, maîtrisent-ils et comprennent-ils spontanément cette temporalisation des déplacements sur quadrillage ?

Si la réponse à la première question est par l'affirmative et la réponse à la deuxième est par la négative, alors il y a lieu de considérer qu'une reprise des déplacements sur le quadrillage qui

[1] Enfants de 7 - 8 ans
[2] Enfants de 8 - 9 ans

leur adjoigne la notion de durée, soit qui les temporalise, est cruciale pour les systèmes d'enseignement des sciences et des techniques.

CADRE THÉORIQUE

La Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques (TSDM) élaborée par le didacticien français Brousseau (1998a) propose une méthode de mise à plat de type de questions que nous venons de formuler dans le paragraphe précédent. Cette méthode consiste à confronter les conditions effectives d'enseignement à des situations caractéristiques (dites fondamentales), impliquant de façon minimale, de la part des acteurs de la relation didactique, l'usage ou la construction d'un concept et de caractériser ainsi les connaissances visées ou obtenues (Bahra, 1995).

Rappelons que ces situations peuvent n'avoir aucune vertu didactique, mais qu'elles sont l'outil que le didacticien élabore en vue de spécifier les limitations qui pourraient handicaper des objets d'apprentissages dans leur visée d'un objet d'enseignement donné.

MÉTHODOLOGIE

Selon la méthode, susmentionnée, de la théorie des situations, il s'agit d'abord de résoudre un problème d'existence : il s'agit de prouver l'existence d'une situation fondamentale caractéristique des connaissances relatives à l'objet d'enseignement 'Déplacement sur le Quadrillage'. Cette situation doit nous permettre de :

1. déterminer les connaissances impliquées dans les activités de déplacement sur le quadrillage, dans le court, le moyen et le long terme ;
2. spécifier les obstacles didactiques éventuels qui rendent ces connaissances autant de points aveugles des contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour de ces activités et autour de leurs prolongements naturels ;
3. provoquer, dans ces contrats, une rupture à même de révéler que ces points aveugles prévus sont bien réels.

Ainsi, la situation fondamentale à exhiber peut s'incarner dans une conceptualisation et spécification des variables spatiotemporelles activables via des activités de déplacement sur quadrillage. C'est ce que nous désignons ici par temporalisation (ou non temporalisation) de ces déplacements. Il s'agit ensuite de jauger les pratiques scolaires actuelles à l'aune des stipulations de cette activation : respectent-elles ou non ces stipulations ? Il s'agit aussi de jauger le rapport des étudiants avec cette temporalisation en observant leur capacité à distinguer, selon le contexte, une droite-trajectoire d'une droite-diagramme : la première est représentative du lieu où se déplace un point mobile, tandis que la seconde est représentative des distances instantanées séparant un point mobile d'un point fixe. Si, malgré le contexte indiquant qu'il s'agit de droites-diagrammes, une proportion suffisamment importante des étudiants cherche à y dégager des droites-trajectoires alors des obstacles didactiques seraient commis à propos de l'objet d'enseignement 'Déplacement sur Quadrillage' et pas seulement sur cet objet. Cet obstacle concerne aussi la notion de proportionnalité et plus généralement la notion de fonction affine. Ainsi qu'en est-il d'un théorème sur ces fonctions, que nous désignons ici du nom de Théorème Fondamentale des Fonctions Affines : ce théorème n'est pas pris en compte par les pratiques didactiques malgré le fait qu'il soit le substratum où s'incarne la dichotomie fondamentale : 'droites-trajectoire/droites-diagrammes'. Or, la temporalisation du déplacement sur quadrillage, telle que nous allons la spécifier ci-dessous est un préalable à l'introduction et la promotion dans le milieu scolaire de cette dichotomie.

Non temporalisation des déplacements sur le quadrillage, un obstacle didactique dormant ?

Le déplacement sur le quadrillage constitue le substrat sur lequel se construit un ensemble de connaissances et de compétences officiellement exigibles de l'élève du Cours Préparatoire. Ces connaissances concernent surtout le repérage dans le plan et l'utilisation de quadrillages pour y coder[3] certains types de lignes polygonales (des chemins, dont les segments sont sur les lignes ou les colonnes du quadrillage et dont les sommets sont sur ses nœuds), reproduire ces lignes d'après leurs codes, reproduire ces lignes d'après leur dessin (pour ces dernières, des segments peuvent traverser des lignes et des colonnes du quadrillage) et lire une carte géographique (Boeche & Beyria, 2001).

D'un niveau d'enseignement à l'autre, ce substrat va connaître une complexification continue. Un affinement de ces connaissances et un affermissement de ces compétences sont censés être immanents à cette complexification.

Mais, une lecture rapide des manuels scolaires montre que, souvent, ceux-ci omettent de faire solliciter par les pratiques scolaires l'évocation de la durée et son activation comme variable didactique pour comprendre le complexus mathématique qui s'organise autour de ces déplacements. Cette omission que nous désignons par NTDQ, acronyme de 'Non Temporalisation des Déplacements dans le Quadrillage', peut s'avérer une décision malencontreuse. Si c'est le cas, NTDQ est un obstacle didactique, au sens de Brousseau dont il faudrait organiser le franchissement[4].

Cet obstacle restera à l'état dormant tant que ses effets sur les rapports, institutionnel et culturel (Chevallard, 1989) au complexus mathématique susmentionné ne sont pas dévoilés. Cet obstacle peut garder cet état tant qu'il n'est pas poussé à se donner à manifestation, notamment par le dévoilement de ces effets. Pour les dévoiler, il serait nécessaire de provoquer, dans les niveaux supérieurs d'enseignement, la rupture du contrat didactique[5] noué par les systèmes didactiques autour du déplacement sur quadrillage en y intégrant la notion de durée.

Avant de dérouler comment provoquer cette rupture par cette intégration, il est convenable de commencer par l'identification de NTDQ : il s'agit de formuler des questions pertinentes à propos du déplacement sur le quadrillage. Ces questions doivent vérifier de manière évidente les propriétés suivantes :

- parce qu'elles aménagent une place à la notion de durée, il y a une probabilité infime que ces questions aient été posées dans quelque livre de l'élève auparavant ;
- malgré cette intrusion de la durée, ces questions enrichissent et s'intègrent naturellement dans les livres de l'élève actuels et passés et même à venir et font sens pour l'élève à propos des déplacements sur le quadrillage. Nous entendons par élève, les élèves de la scolarité obligatoire.

Il s'agit là d'un problème d'existence dont la solution n'exige autre chose que d'exhiber des questions remplissant les deux conditions ci-dessus. Mais, des questions qui sont des métamorphoses de questions classiques après y avoir introduit la notion de durée[6].

---

[3] Le code $1\rightarrow 2\uparrow 3\leftarrow 2\downarrow$ est une instruction dont l'exécution consiste en le traçage d'une ligne brisée qui partant d'un nœud donné du quadrillage passe successivement par un carreau 'de gauche à droite', deux 'de bas en haut', trois 'de droite à gauche' et deux 'de haut en bas'.

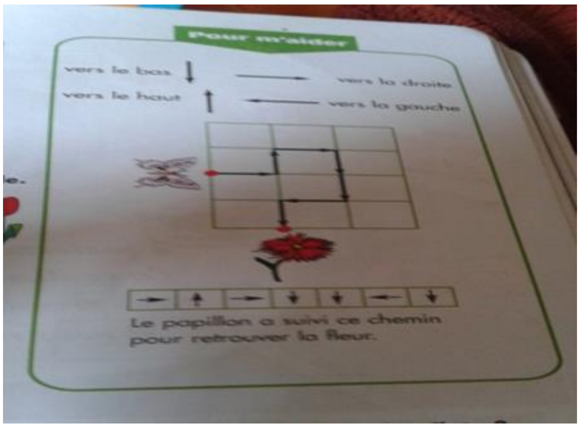
[4] Sur les obstacles didactiques et les stipulations de leur franchissement voir Brousseau (1998b)

[5] Sur ce point voir Brousseau (1998a).

[6] Sur la métamorphose des exercices, voir Gras (1999)

Voici un exemple prototypique de cette métamorphose : Considérons l'activité à laquelle renvoie l'image, ci-dessous, prise dans un livre de mathématiques pour l'élève du C.P. (5-6 ans) (Boeche& Beyria, 2001). Le contenu de l'image constitue l'essentiel du travail attendu de l'élève : tracer le chemin du papillon à partir de son code (le code et la réponse sont dans l'image de la figure 1).

FIGURE 1



Collection « À nous les maths » p.53, (Boeche & Beyria, 2001)

Le texte, qui va suivre, sur la métamorphose de cette activité ne s'adresse pas à l'élève, il s'adresse au lecteur qui est invité à juger de la possibilité de l'adresser à un élève, qui n'est pas obligatoirement un enfant de 5-6 ans, mais peut être un enfant beaucoup plus âgé. Cette métamrphose constitue la matière de la Situation Fondamentale mentionnée ci-dessus. Considérons donc que l'image de la Figure 1 est un quadrillage rejeté sur la carte représentant le parcours du papillon (celui-ci devrait être représenté par un point mobile dans la carte). Supposons aussi que le papillon est astreint à se déplacer selon les conditions suivantes :

- en se représentant idéellement que le papillon est sous des rayons lumineux horizontaux venant d'une source lumineuse se trouvant loin à sa droite et qu'un écran est disposé verticalement à sa gauche, l'ombre du papillon suit une ligne droite, dans cet écran, et cette ligne est représentée par le bord vertical gauche du quadrillage de la carte ;
- de même, en se représentant idéellement que le papillon est sous des rayons lumineux verticaux venant d'une source lumineuse se trouvant loin au dessus de lui et qu'un écran est disposé horizontalement au dessous, l'ombre du papillon suit une ligne droite, dans cet écran, et cette ligne est représentée par le bord horizontal bas du quadrillage de la carte.
- Dans son déplacement, le papillon fait une seconde entre le point de départ et le premier changement de direction, il fait aussi, chaque fois, une seconde entre deux changements consécutifs de direction (c'est-à-dire aussi que pour parcourir un segment de la ligne polygonale décrivant son parcours, le papillon fait une seconde et ce, quelque soit la longueur de ce segment).

Dans ce nouveau contexte la consigne 'tracez le chemin du papillon à partir de son code' peut se métamorphoser en la consigne suivante (rappelons que la consigne métamorphosée peut avoir pour adresse, le cas échéant, un élève d'un niveau d'enseignement plus élevé que le C.P.) :

- *prolongez le quadrillage de la carte par un quadriallage qui lui est symétrique par rapport à son bord vertical gauche et, dans ce prolongement, considérez qu'un carreau de son bord horizontal bas représente une durée d'une seconde et décrivez, par un chemin à tracer sur ce prolongement, l'historique du mouvement de l'ombre du papillion sous les rayons horizontaux ;*
- *prolongez le quadrillage de la carte par un quadriallage qui lui est symétrique par rapport à son bord horizontal bas et, dans ce prolongement, considérez qu'un carreau de son bord vertical gauche représente une durée d'une seconde et représentez, par un chemin à tracer sur ce prolongement, l'historique du mouvement de l'ombre du papillon sous les rayons verticaux ;*
- *à partir des deux historiques, retrouvez, dans le quadrillage de la carte, le tracé du chemin parcouru par le papillon pour retrouver la fleur.*

Cette idée de rayons lumineux verticaux, de l'ombre d'un point (sous ces rayons) dans un écran planté à l'horizontal, de rayons horizontaux, de l'ombre d'un point (sous ces rayons) dans un écran planté à la verticale et de la localisation d'un point à partir de la localisation de ses deux ombres est ce que conceptualise le fait de doter une feuille de papier d'un système cartésien de coordonnées rectangulaires pour le repérage de ses points. Les rayons lumineux dont il s'agit ici n'ont qu'un lien métaphorique avec les rayons lumineux de la physique. Nous employons l'expression « ombre du papillon sous des rayons verticaux » comme abréviation de l'expression suivante : le papillon étant représenté par un point dans une carte à carreaux, l'ombre en question est « la position sur la colonne à l'extrême gauche de ce quadrillage de la projection du point parallèlement aux lignes du quadrillage ».

C'est pour amener les élèves à se représenter le problème du repérage des points de la feuille de papier, à conceptualiser progressivement ce repérage et à le spécifier, de plus en plus finement d'un niveau d'enseignement au niveau suivant, que les activités du déplacement sur quadrillage sont proposées comme objet d'enseignement dès la première année de l'enseignement obligatoire (Boeche & Beyria, 2001). Nous avançons l'idée selon laquelle, du point de vue mathématique comme du point de vue épistémique, la réalisation des stipulations de la consigne métamorphosée est une étape nécessaire dans cette conceptualisation. Cette métamorphose doit être présente, sous une forme ou une autre, dans la succession des manuels scolaires. Les signes de cette présence doivent être décelés dans la conception qui prévaut dans le milieu estudiantin à propos de la notion de courbe. Ainsi, si cette conception écarte de cette notion sa teneur morpho-dynamique alors il est permis de dire que la métamorphose en question n'est pas à l'œuvre ni dans les manuels scolaires successifs, en tant que dans ces manuels la notion de courbe doit s'y trouver en filigrane, ni dans les contrats didactiques que les systèmes didactiques nouent autour de cette même notion.

Aussi, tentions-nous d'établir que cette teneur est réellement absente à la fois dans l'interprétation que donnent les manuels scolaires de la courbe et dans les représentations que s'en font les étudiants des sections scientifiques et techniques. Pour établir cette absence, il faut tout d'abord spécifier la réalisation des stipulations de la consigne métamorphosée.

Dans les deux diagrammes D1 et D2 (figures 2 et 3), S_1, S_2, S_3 etc. représentent les bornes successives délimitant les intervalles de temps couvrant la durée d'une seconde et P_1, P_2, P_3 etc., les points, sur la carte, qui représentent les positions qui peuvent être prises par l'ombre (sous des rayons horizontaux pour D1 et sous des rayons verticaux pour D2). Nous donnerons dans les paragraphes qui suivent le mode général de construction de tels diagrammes et leur couplage en un seul système schématique unifié.

Dans chacun des deux diagrammes, le tracé permet de localiser la position de l'ombre sur l'axe des ombres pour chaque point-instant choisi sur l'axe des temps : pour cela, il suffit de se diriger à partir de ce point-instant vers le tracé, parallèlement à l'axe des positions, et puis, du point d'arrivée sur le tracé, se diriger parallèlement à l'axe des temps vers l'axe des positions ; le point d'arrivée sur cet axe est la position de l'ombre pour le point-instant choisi. Pour localiser simultanément l'ombre du papillon sous les rayons horizontaux et son ombre sous les rayons verticaux, il suffit d'organiser le couplage des deux diagrammes comme suit : l'axe des temps du 'Diagramme D1' relatif à l'ombre sous les rayons horizontaux est disposé horizontalement et est dirigé de droite à gauche ; l'axe des positions de l'ombre est disposé verticalement et est dirigé de bas en haut. L'axe des temps du 'Diagramme D2' relatif à l'ombre sous des rayons verticaux est placé verticalement et admet même origine que l'axe des temps du 'Diagramme D1' et est dirigé de haut en bas. Les deux axes forment un angle droit dont la bissectrice constitue l'axe de couplage des deux axes des temps : un point S''de cet axe de couplage détermine un rectangle $P'_{S''}S''P''_{S''}P_{S''}$ (voir le diagramme, couplage du Diagramme D1 et du Diagramme D2 'figure 4') dont le sommet $P_{S''}$ est la position du papillon à l'instant s, (s,s) étant les coordonnées du point S''(s,s).

FIGURE 2

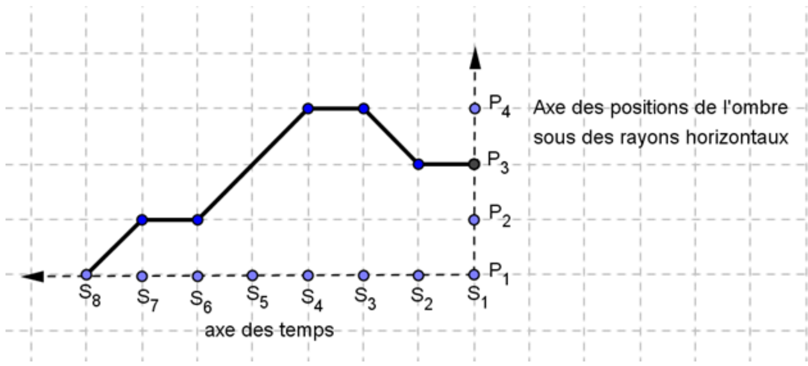


Diagramme de localisation de l'ombre sous des rayons horizontaux (Diagramme D1)

FIGURE 3

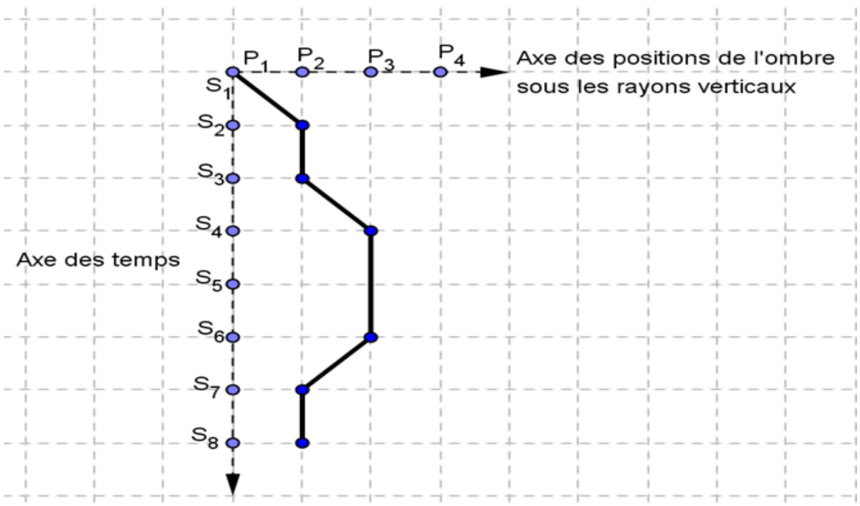
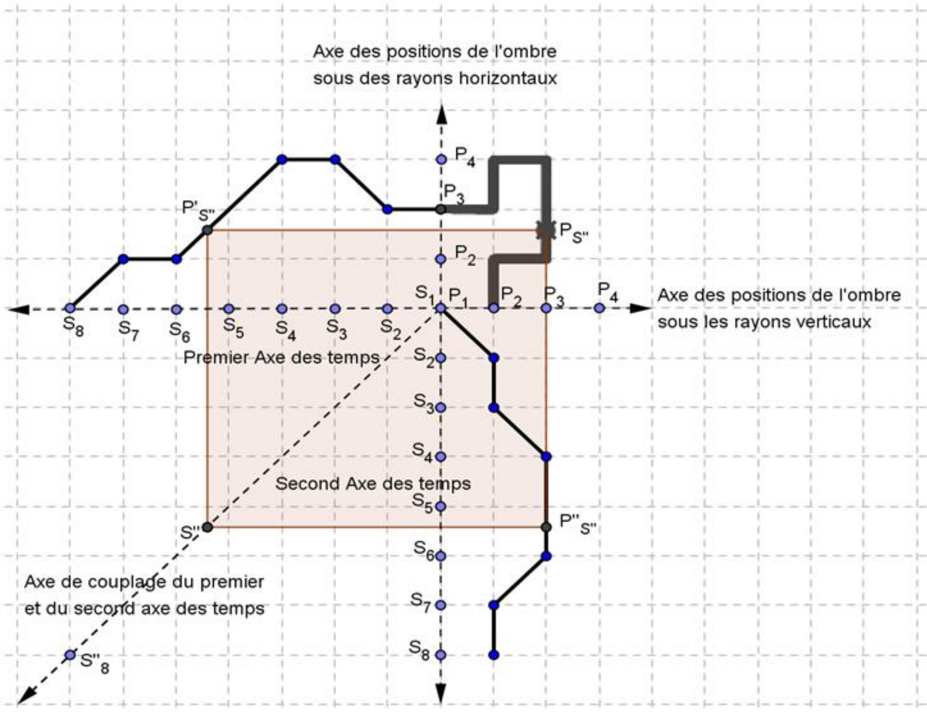


Diagramme de localisation de l'ombre sous des rayons verticaux (Diagramme D2)

FIGURE 4



Couplage du Digramme D1 avec le Diagramme D2
(En faisant parcourir au point S'' le segment [$S_1S''_8$], le point $P_{S''}$ parcourt le Chemin du Papillon)

Les premiers enseignements de la géométrie s'articulent autour du repérage et déplacement sur quadrillage. Les compétences à developper via ces enseignements concernent la capacité à repérer des cases et des nœuds d'un quadrillage, à situer un objet par rapport à soi ou à un autre objet, à donner sa position et décrire son déplacement. Les objectifs portent sur la capacité à se repérer dans un quadrillage et donc à savoir coder et décoder les cases d'un quadrillage, à savoir coder et décoder les nœuds d'un quadrillage et à se déplacer sur un quadrillage.

Nous considérons que ces enseignements resteraient tronqués et ces capacités hors d'atteinte si ces enseignements ne sont pas accompagnés de la temporalisation du déplacement sur quadrillage telle que la consigne métamorphosée le suggère. Continuer à ignorer cette temporalisation est une décision malencontreuse que les différents systèmes d'enseignement des sciences et des techniques, de par le monde, auraient prise, poussés à cela par la nécessité d'avoir recours au tableau noir comme médium quasi exclusif. Dans le cas où elle se confirme, l'absence, dans les manuels scolaires et dans les monographies de l'équivalent de la consigne métamorphosée, comme prolongement naturel de la consigne originelle, atteste de cette décision.

Cette confirmation passe par la démonstration établissant que d'une part les diagrammes D1 et D2, et assimilés, constituent la motivation, à la fois ontologique, praxéologique et pragmatique, de l'introduction du déplacement sur le quadrillage comme constitutif des premiers enseignements de la géométrie et que, d'autre part, l'équivalent de ces mêmes diagrammes n'apparait point parmi les objets d'apprentissage que les systèmes d'enseignement des sciences et des techniques produisent.

Notons que, au cas où cela se confirme, cela constitue un argument en faveur de la véracité de l'assertion suivante : cette carence serait due à la teneur morpho-dynamique que ces diagrammes sténographient : cette teneur étant incompatible avec la nature statique des objets auxquels le tableau noir peut s'accommoder, l'emprise de ce tableau, comme médium, sur ces systèmes aurait fini par bloquer l'apparition de ces diagrammes et de leur équivalent parmi les objets d'apprentissages que ces derniers produisent.

Rappelons que les manuels scolaires et les monographies sont les supports privilégiés où les objets d'apprentissage se trouvent consignés.

Nous considérons que l'existence de l'équivalent des diagrammes D1 et D2 parmi les objets d'apprentissages est consubstantiellement liée à la réalisation à travers ces objets d'une distinction fondamentale : distinguer la droite en tant que trajectoire de la droite en tant que diagramme. Il est donc question d'une dichotomie fondamentale que ces objets doivent réaliser : la dicothomie 'droite trajectoire/droite diagramme'.

Dans ce qui suit, nous allons montrer que la réalisation par ces objets de cette dichotomie est loin d'être accomplie. Pour ce faire, nous considérons un problème classique d'arithmétique qu'on propose habituellement aux élèves du CM1-CM2. Il s'agit du problème suivant : étant donné deux trains roulant dans des voies parallèles et dans le même sens avec des vitesses constantes. En quel point et à quel instant le train à la grande vitesse ratrappe le train à la petite vitesse si on sait qu'à un instant donné celui-ci se trouve devant l'autre train à une distance donnée. Nous replaçons dans le registre géométrique ce même problème et nous le proposons aux élèves-ingénieurs ou aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles. Il s'agit de voir si ces élèves-ingénieurs vont trouver des difficultés à résoudre le problème tout en restant dans le registre géométrique. Auquel cas c'est la non observation des pratiques didactiques de la dichotomie en question qui serait derrière cette contreperformance éventuelle de ces élèves-ingénieurs.

Notons que la non observation des pratiques didactiques de la dichotomie 'droite trajectoire/droite diagramme' est une incarnation de l'obstacle NTDQ. Aussi estimions-nous convenable de présenter les éléments de cette dichotomie.

La dichotomie 'droite-trajectoire/ droites-diagrammes et les stipulations du franchissement de l'obstacle NDTQ

Droite-trajectoire et droites-diagrammes

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), une droite du plan, lorsqu'elle n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, peut s'interpréter ou comme diagramme ou comme trajectoire : Deux droites (d) et (d') d'équations cartésiennes respectives « $(d) : y = ax + b$ » et « $(d') : y = a'x + b'$ » peuvent s'agréger en la droite (c) d'équation paramétrique $\begin{cases} x = at + b \\ y = a't + b' \end{cases}$ ou en la droite (c') d'équation paramétrique $\begin{cases} x = a't + b' \\ y = at + b \end{cases}$. Prise chacune avec son renvoi à l'agrégation dont elle est issue, ni (c) ni (c') ne saurait s'interpréter que comme trajectoire. Prise chacune avec son renvoi à l'agrégation dont elle est une des deux composantes, ni (d), ni (d') ne saurait s'interpréter que comme diagramme.

Remarquons que, (d) et (d') deux droites d'équations cartésiennes respectives « $(d) : y = ax + b$ » et « $(d') : y = a'x + b'$ » étant données, il existe un couple unique(a'', b'') de réels telle que (d) ait pour équation paramétrique : $\begin{cases} x = a't + b' \\ y = a''t + b'' \end{cases}$. Le passage de l'équation cartésienne originelle « $(d) : y = ax + b$ » à cette équation paramétrique est une dissociation de (d)**,** considérée une droite-trajectoire, en une paire de droites-diagrammes. Aussi, considérons-nous convenable de convenir, dans la suite, que, dans un contexte où une droite, non parallèle à l'axe des ordonnées, n'est pas sollicitée dans la perspective de sa dissociation en une paire de droites-diagrammes, est, elle-même, une droite-diagramme.

À propos de la dissociation d'une droite-trajectoire en un couple de droites-diagrammes, on peut envisager, entres autres constructions, la construction suivante : le plan étant rapporté à un repère orthonormé (O ; I ; J), t et s deux réels négatifs ou nuls, on considère les couples de droites $((d_0),(d_1))$ et $((\delta_0), (\delta_1))$ *avec* $(d_0) : x = t$, $(d_1) : x=t-1$, $(\delta_0) : y = s$ et $(\delta_1) ; y=s-1$. A_0 et A_1 deux points du plan distincts. La parallèle à l'axe des abscisses passant par A_0 coupe (d_0) en A'_0 et la parallèle à l'axe des abscisses passant par A_1 coupe (d_1) en A'_1. La parallèle à l'axe des ordonnées passant par A_0 coupe (δ_0) en A''_0 et la parallèle à l'axe des ordonnées passant par A_1 coupe (δ_1) en A''_1. La droite (A_0A_1) se dissocie en les couples de droites $((A'_0A'_1) ; (A''_0, A''_1))$ et le segment $[A_0A_1]$ en le couple de segments $([A'_0A'_1] ; [A''_0A''_1])$ en ce sens qu'ayant :

- T_0, le point de coordonnées (t, s) ;
- T_1, le point de coordonnées $(t-1, s-1)$;
- T, un point de (T_0T_1) ;
- T', l'intersection de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par T avec $(A'_0A'_1)$;
- T'', l'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par T avec $(A''_0A''_1)$;
- et U_T, le point tel que $T'TT''U_T$ est un rectangle ;

On a : quand T parcourt (T_0T_1) dans le sens de T_0 vers T_1, U_T parcourt (A_0A_1) dans le sens de A_0 vers A_1 et quand T parcourt $[T_0T_1]$, dans le sens de T_0 vers T_1, U_T parcourt $[A_0A_1]$ dans le sens de A_0 vers A_1.

On peut alors envisager la dissociation d'une ligne polygonale $[A_iA_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$, en un couple de lignes polygonales en considérant :

- pour chaque segment $[A_iA_{i+1}]$ de cette ligne, les couples de droites $((d_i),(d_{i+1}))$ et $((\delta_i), (\delta_{I+1}))$ *avec* $(d_i) : x = t-i$, $(d_{i+1}) : x = t-(i+1)$, $(\delta_i) : y = s-i$ et $(\delta_1) ; y = s-(i+1)$ ainsi que les segments $[T_iT_{i+1}]$ avec T_i le point de coordonnées $(t-i, s-i)$;
- T, un point de $[T_0T_n]$;
- T', l'intersection de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par T avec $\bigcup_{0\leq i\leq n}[A'_iA'_{i+1}]$;
- T'', l'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par T avec $\bigcup_{0\leq i\leq n}[A''_iA''_{i+1}]$;
- et U_T, le point tel que $T'TT''U_T$ est un rectangle ;

Quand T parcourt $[T_0T_n]$ dans le sens de T_0 vers T_n, U_T parcours la ligne polygonale $[A_iA_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$ dans le sens de A_0 vers A_n. Si cette ligne est considérée trajectoire d'un point mobile M, le point U_T est la position de ce point à l'instant τ que représente la position du point T. Le procédé de construction du point U_T est l'opération qui consiste en la localisation du point mobile M pour l'instant τ.

On peut envisager aussi des 'approximations successives' de dissociation de courbes en une succession de couples de lignes polygonales…

Nous avons débuté cet article avec la dissociation d'une ligne polygonale (la trajectoire du papillon) en deux lignes polygonales : la première est spécifique à la description du 'déplacement du papillon' dans la direction de l'axe des abscisses, tantôt dans un sens tantôt dans l'autre, la seconde est spécifique à la description du 'déplacement du papillon' dans la direction de l'axe des ordonnées, tantôt dans un sens tantôt dans l'autre.

De ce qui précède, nous tirons que la droite admet deux interprétations qui se présentent comme deux faces d'une même pièce de monnaie, de sorte que la maîtrise d'une des faces nécessite être informé et de cette face et de l'autre face aussi. La première interprétation est la droite-diagramme et la seconde la droite-trajectoire.

Cette interprétation dichotomique vaut aussi pour un segment et pour une ligne polygonale de sorte qu'on puisse parler de segments-trajectoires, de segments-diagrammes, de lignes-polygonales-trajectoires et de lignes-polygonales-diagrammes : à ce propos, remarquons que, contrairement à la ligne polygonale $[A_iA_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$ dont elles sont issues par dissociation, aucune des deux lignes polygonales $[A'_iA'_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$ et $[A''_iA''_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$ ne peut se refermer, ni même se retourner, sur elle-même. Ainsi, un choix adéquat de la signification des axes relativement à chacune des deux lignes fait de chacune d'elles un diagramme ; ce choix se présente comme suit : I', le symétrique de I par rapport à O et J', le symétrique de J par rapport à O, pour $[A'_iA'_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$, l'axe des abscisses est l'axe dont le bipoint unitaire est (O,I') et l'axe des ordonnées l'axe dont le bipoint unitaire est (O,J). Pour $[A''_iA''_{i+1}]_{0\leq i\leq n}$, l'axe des abscisses est l'axe dont le bipoint unitaire est (O,J') et l'axe des ordonnées, l'axe dont le bipoint unitaire est (O,I).

On sait que les droites passant par l'origine sont des droites-diagrammes représentatives de fonctions affines (i.e. de la proportionnalité). Il existe des lignes-polygonales-trajectoires spécifiques à ces fonctions (i.e. à la proportionnalité). Un théorème, que nous estimons convenable de dénommer TFFA acronyme du 'Théorème Fondamental des Fonctions Affines' prend deux formulations différentes selon qu'on se place dans le registre arithmétique/géométrique de ces droites-diagrammes ou dans le registre purement géométrique de ces lignes. La partie empirique de ce travail s'articule autour de la version 'arithmétique/géométrique' de ce théorème.

Dérivation du TFFA du problème des deux trains

Deux trains Tr1 et Tr2 roulent à des vitesses constantes, respectivement v et V avec v<V. Deux cas de figures entrent alors en lice quant aux conditions initiales des deux mouvements :

- le cas où, en un instant t_0, le train Tr1 se trouve à une distance d de la position O où se trouve Tr2 et que l'on s'intéresse aux positions par rapport à O des deux trains à tout instant $t > t_0$. Nous disons alors qu'un avantage topologique est accordé à Tr1 au détriment de Tr2 ;
- le cas où, en un instant t_0, il y a passage de Tr1, en un point O, tandis que le passage de Tr2 en ce même point n'est observé qu'à un instant $t_1 > t_0$ et que l'on s'intéresse aux positions des deux trains par rapport à O à tout instant $t > t_1$. Nous disons alors qu'un avantage chronologique est accordé à Tr1 au détriment de Tr2.

À côté de cela, il y a deux modes de conversion possibles d'un avantage chronologique (respectivement, avantage topologique) en un avantage topologique (respectivement en un avantage chronologique) : dans le premier mode de conversion, l'instant de rattrapage du train à la petite vitesse par le train à la grande vitesse (soit l'instant où les deux trains sont à la même distance de O) est le même pour le cas de l'avantage originel que pour le cas de l'avantage converti. Par contre, du premier cas au second, la distance à O est différente. Dans le deuxième mode de conversion, c'est la position de ce rattrapage (soit la distance à O des deux points de rattrapage) qui est la même, indépendamment de l'instant où cette position commune est atteinte dans l'un ou l'autre cas.

Appelons le premier mode de conversion « le mode chronologique » et le second mode « le mode topologique ». La formulation, dans le registre géométrique/arithmétique contextualisé, du TFFA affirme que : « Les avantages topologiques sont proportionnels aux avantages chronologiques auxquels ils sont convertis et le coefficient de proportionnalité est *v*, si le mode de conversion est le mode topologique, V, si ce mode est le mode chronologique ».

En fait, une des configurations qui actualise les données du TFFA dans sa formulation dans le registre 'géométrie/arithmétique' contextualisé est le cas particulier suivant :

- (e) et (h) sont deux droites perpendiculaires en O et supports d'un repère orthonormé dont on dote le plan ;
- relativement à ce repère, (f) et (g) passent par des points dans le premier quadrant et la pente de (f) est supérieure à celle de (h) ;
- le point A_0, est un point de l'axe des abscisses tel que x_{AO} >0.

Dans ces conditions, x_{AO} mesure un avantage chronologique, y_{A3} mesure l'avantage topologique auquel l'avantage chronologique x_{AO} se converti dans le mode topologique. Y_{B3} mesure l'avantage topologique auquel l'avantage chronologique x_{AO} se converti dans le mode chronologique.

Le fait que A_5 soit confondu avec A_O veut dire que $x_{A4} = x_{AO}$ et $y_{A3} = y_{A4}$. En outre, par construction, on a $y_{A4} = v* x_{A4}$. Aussi a-t-on $y_{A3} = v* x_{A0}$. Cette dernière égalité exprime le fait que les avantages topologiques sont proportionnels aux avantages chronologiques auxquels ils sont convertis et le coefficient de proportionnalité est v quand le mode de conversion est le mode topologique.

De manière analogue on démontre que $y_{B3} = V* x_{A0}$ et cette égalité exprime le fait que les avantages topologiques sont proportionnels aux avantages chronologiques auxquels ils sont convertis et le coefficient de proportionnalité est V quand le mode de conversion est le mode chronologique.

DISSOCIATION, CHEZ LES ÉTUDIANTS, DE LA FONCTION AFFINE DE LA MODÉLISATION DES MOUVEMENTS RECTILIGNES UNIFORMES

L'organisation du franchissement de l'obstacle NTDQ, présenté plus haut, nécessite d'inclure le théorème fondamental des fonctions affines, dans ses deux formulations, parmi les objets d'apprentissages. Or, les pratiques didactiques fonctionnent comme si les étudiants sont capables d'établir ce théorème, au moins dans sa version géometrique/arithmétique contextualisée. Ce faisant, ces pratiques ignorent l'existence de l'obstacle NTDQ. Les effets néfastes de cet obstacle sur le rapport des étudiants avec les notions de proportionnalité, de fonctions affines et de représentation graphique de fonctions numériques de la variable réelle restent imperceptibles pour elles.

Une situation dont la solution coïncide avec la performance qui consiste à établir le théorème en question, dans sa version géometrique/arithmétique contextualisée, peut provoquer la rupture du contrat didactique que les systèmes didactiques nouaient autour de la proportionnalité, des fonctions affines, de la repésentation graphique de ces fonctions ainsi que de celle des fonctions numériques de la variable réelle en général. Cette rupture révelerait, en particulier, que la mobilisation de cette représentation en tant que diagramme est un point aveugle de ces contrats.

Population de la recherche

Les établissements qui nous ont servi de terrains d'expérience sont trois grandes écoles d'ingénieurs dans lesquelles la formation est à grande teneur mathématique : il s'agit nommément de l'Ecole Nationale de l'Industrie Minérale de Rabat (Maroc), l'École Mohammedia d'Ingénieurs à Rabat et de l'Institut National des Postes et des Télécommunications de Rabat. Font partie aussi de ces terrains l'École Normale Supérieure de l'Enseignement Technique de Mohammedia et des Classes Préparatoires aux grandes écoles à Safi. Dans ces deux établissements la formation mathématique dispensée est assez forte. A part les Classes Préparatoires (Bac Sciences + 2), les autres étudiants ont comme niveau d'études (Bac sciences ou techniques + 4 (ou +5)).

Situation proposée

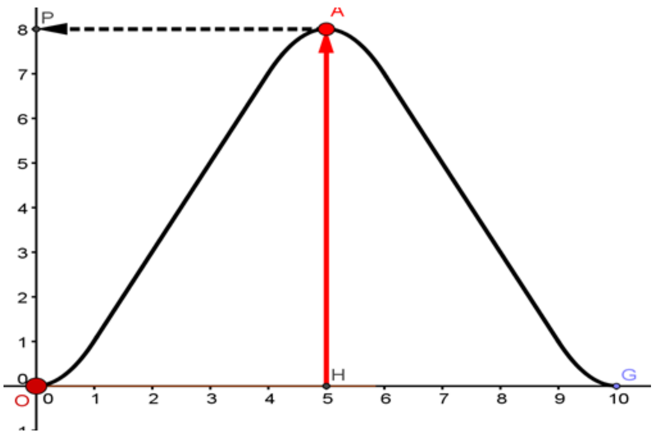
Énoncé de la Situation 'les deux trains'

Considérons l'énoncé suivant : Deux trains roulent dans deux voies parallèles et dans le même sens, avec des vitesses constantes, V et v données telles que V>v, et qui, à un instant connu t0, se positionnent dans deux endroits séparés d'une distance connue d. Il s'agit de déterminer l'instant et l'endroit où le train à la grande vitesse rattrape le train à la petite vitesse.

Il s'agit d'étudier la possibilité (ou l'impossibilité) de compléter la figure ci-dessous de façon à y représenter les éléments suivants :

- les trajectoires des deux trains, l'instant t et la position P où le train de vitesse V rattrape le train de vitesse v ;
- un instant t' antérieur à l'instant t et un instant t'' postérieur à l'instant t accompagnés chacun des positions relatives des deux trains en ces instants.

FIGURE 5



Positionnement du policier

Analyse a priori de la situation 'les deux trains'

La solution de la situation tient en un seul trait. Mais ce trait est la marque de la mobilisation par son auteur d'un modèle implicite d'action[7] qu'on peut présenter en ces termes. Dans la figure, les deux demi-droites formant un angle de 90° doivent être interprétées comme suit : ces deux côtés dotent le plan d'un repère orthogonal et délimitent le premier quadrant relatif à ce repère. Le côté 'horizontal' est le demi-axe des abscisses positives modélisant l'axe des temps, et le côté 'vertical' est le demi-axe des ordonnées positives, modélisant l'axe des positions des trains par rapport à un point fixe, représenté par l'origine O du repère. Le trait dont il est question est alors, celui représentant une demi-droite d'origine un point de l'axe des ordonnées et d'ordonnée *d ;* cette demi-droite est contenue dans le premier quadrant et est parallèle à la demi-droite qui, relativement au repère ainsi choisi, a la pente la plus petite sans que celle-ci soit nulle.

Cette demi-droite coupe en un point P la demi-droite qui, relativement au même repère, a la pente la plus grande sans être infinie. La projection orthogonale de P sur l'axe des ordonnées représente la position du point où le train à la grande vitesse rattrape le train à la

[7] Sur la notion de modèle implicite d'action, voir Brousseau (2003)

petite vitesse. La projection orthogonale de P sur l'axe des abscisses représente l'instant où ce rattrapage survient. Le reste de la solution devient, à ce niveau, évident.

Le propre de ce modèle implicite d'action est qu'il mobilise, en tant que diagrammes, les deux demi-droites qui sont à l'intérieur de l'angle droit : d'abord chacune représente le diagramme intrinsèque de l'évolution, avec le temps, de la distance séparant le train d'un point fixe. Ensuite, de ces deux digrammes dérivent deux diagrammes répondant aux stipulations du contexte. La construction, présentée ci-dessus, de la troisième demi-droite est le diagramme contextualisé pour le train à la vitesse la plus petite. Pour le train à la vitesse la plus grande, le diagramme contextualisé est confondu avec le diagramme intrinsèque.
Vu la complexité de ce modèle implicite d'action, le problème de didactique est de savoir comment faire en sorte que cette complexité ne pousse pas le professeur à la monstration (Johsua & Dupin, 1993) de la solution de la situation via le traçage du trait en question, et comment l'amener à faire en sorte que l'apprenant arrive à mobiliser de lui-même ce modèle.

La complexité du modèle implicite d'action qu'il est nécessaire de mobiliser par le solutionneur de la situation pour qu'il puisse établir le bon résultat nous a amené à considérer les deux propositions p et q suivantes :

- p : être incapable de solutionner la situation 'les deux trains' ;
- q : être incapable d'établir le théorème des fonctions affines.

Il est patent que $p \Rightarrow q$, c'est-à-dire que dans une population prise au hasard parmi les élèves-ingénieurs et les élèves des écoles préparatoires aux écoles d'ingénieurs, les étudiants capables d'établir le théorème des fonctions affines tout en étant incapables de solutionner la situation 'les deux trains' devraient être une espèce très râre. Ainsi, si, au sein d'un système d'enseignement des sciences et des techniques, dans une telle population, la proportion des étudiants incapables de solutionner la situation 'les deux trains' est tant soit peu imposante alors la reprise répétée du Théorème Fondamental des Fonctions Affines, dans ses deux formulations, aux différents niveaux de l'enseignement secondaire, est une nécessité qui doit s'imposer comme telle pour ce système.

Analyse a posteriori de la situation 'les deux trains'
Nous avons contacté des professeurs des écoles précitées pour qu'ils fassent passer aux étudiants de leurs classes la situation 'les deux trains'. Tous ont eu une réaction de répulsion à la lecture de l'énoncé de la situation : elle leur semble incongrue ; dans leurs classes, ce n'est ni le moment ni le lieu de demander aux étudiants de réflechir sur ce qui semble être des banalités qui, de surcroît, semblent incohérentes ou fausses. Le texte de la situation renvoie à un problème classique d'arithmétique pour les élèves du niveau du primaire, il leur semble confus et ils ne savent pas trop ce qu'un texte de cette nature vient faire dans leurs classes. C'est donc à contre-cœur qu'ils ont daigné proposer à leurs élèves de répondre par écrit et individuellement aux questions de la situation. Les élèves ont manifesté beaucoup de dédain à l'égard de ces questions. Aussi n'ont-ils pas pris assez de recul pour comprendre l'enjeu de la situation et ont bâclé des réponses : beaucoup se sont confondus dans des calculs tendant à passer par un traitement algébrique de la Situation. La plupart n'ont pas fini ce traitement et ont rendu la copie sans répondre aux questions demandées. Des étudiants ont poussé leur sceptisme à l'égard du travail demandé jusqu'à confondre, dans leurs réponses, les demi-droites de la figure avec la représentation de l'emplacement des rails des deux trains. Ainsi, plutôt que de révéler quelque compétence de ces étudiants, les performances enregistrées par ces derniers révèlent le caractère incongru de la situation eu égard à leur profil.

La situation n'est donc pas aussi incongrue qu'on le croit et la complexité du modèle implicite d'action sous-jacent à la solution de la situation le confirme. La rupture des contrats didactiques afférents à la situation s'est donc manifesté en prenant la forme d'un conflit sociocognitif entre les auteurs de la situation, nous-mêmes, d'une part et ceux à qui elle est adressée, les étudiants et leurs professeurs d'autre part. Les contrats dont il s'agit sont ces contrats didactiques successifs que les systèmes didactiques nouent autour de la proportionnalité, autour des fonctions affines et de leurs representations graphiques, ainsi qu'autour de la courbe représentative d'une fonction numérique de la variable réelle, qui en tant que diagramme, est censée être pourvoyeuse de modèles de mouvements rectilignes. Cette rupture s'est confirmée dans les résultats recueillis auprès des élèves- ingénieurs testés. En effet, ces résultats se présentent comme suit (voir Tableau 1).

TABLEAU

Résultats du test

Filières	**Niveau**	**Etablissement**	**Nombre d'étudiants**	**Bonnes Réponses (% de réussite)**
BTS / Plastique et composite	Bac + 2	ENSET DE MOHAMMEDIA	**18**	**0 (0 %)**
BTS / Electronique Industrielle	Bac + 2	ENSET DE MOHAMMEDIA	**23**	**0 (0 %)**
CAPES / Mathématiques	Bac + 5	ENSET DE MOHAMMEDIA	**28**	**0 (0 %)**
CAPES / physique chimie	Bac + 5	ENSET DE RABAT	**27**	**0 (0 %)**
Futur professeur de mathématiques au collège	Bac +3	CPR DE SAFI	**22**	**1 (4,5 %)**
Total			**118**	**1 (0,84 %)**

Ainsi, dans la population concernée par cette recherche, la catégorie 'CAPES/Economie - Gestion' de l'ENSET de Mohammedia est à éliminer car elle casse l'homogénéité du groupe et enregistre zéro réussite. Mais, moins de 10% de réussite est la performance enregistrée par l'ensemble des catégories de la population testée. Cette performance est trop maigre pour qu'elle puisse faire l'objet de quelque analyse statistique de précision. En fait, c'est par cette maigreur que s'exprime la rupture des contrats didactiques précités. Nous nous contentons donc, comme analyse des résultats, de la confirmation que ces contrats ont un point aveugle et ce point est la dichotomie 'diagramme/trajectoire'. Les performances de ces élèves-ingénieurs achopperaient sur ce point : la courbe représentative de la fonction numérique de la variable réelle ne saurait avoir la trajectoire comme seule interprétation : au risque de nous répéter, insistons sur le fait qu'elle peut aussi, et surtout, exprimer un diagramme. Ceci fait d'elle la notion pourvoyeuse de modèles de mouvements rectilignes.

CONCLUSION

Pourquoi un théorème aussi fondamental que celui que nous désignons ici par 'Théorème Fondamental des Fonctions Affines' n'a pas encore fait son apparition parmi les objets d'apprentissage, ni dans sa formulation, ici déroulée, dans le registre 'géométrique/arithmétique contextualisé', ni dans sa formulation, ici explicitée, dans le registre purement géométrique ?

La dichotomie, ici présentée, 'droites-trajectoires/droites-diagrammes' est une distinction dans les droites, en tant que courbes de fonctions affines, sur laquelle les pratiques didactiques n'insistent guère. Or cette insistance, de la part de ces pratiques, est nécessaire pour que la morphogenèse de la niche de ce théorème advienne.

Cette insistance exige que les objets d'apprentissage consignés dans les manuels scolaires et dans les monographies soient des objets qui préservent la teneur morpho-dynamique des objets d'enseignement et des objets de savoir visés à travers eux. Laquelle préservation exige l'activation, par le professeur, de variables spatiotemporelles comme variables de commande.

Il faudrait pour cela libérer ces objets d'apprentissage des effets indésirables prévisibles du médium auquel on aura recours pour les faire fonctionner : quand ce médium est le tableau noir, comme ce fut le cas avant l'avènement des TICE, cette activation des variables spatiotemporelles peut faire défaut ou peut facilement être omise sans que cela crée de tensions perceptibles entre les protagonistes de la relation didactique.

Pris avec leur renvoi à la fois à la nature de la situation 'les deux trains', au profil des sujets mis devant cette situation et aux performances observées chez ces derniers, les rapports, institutionnel, personnel et culturel (Chevallard, 1989) à l'objet d'enseignement 'Déplacement sur Quadrillage' resteront des rapports incongrus tant que cet objet n'est pas explicitement associé institutionnellement et culturellement à la dichotomie 'droites-diagrammes/droites trajectoires' dont nous avons explicité, ici même, les tenants et aboutissants.

RÉFÉRENCES

Bahra, M. (1995). *Problème de didactique de la numération, échec et succès de la re-mathématisation*. Thèse de doctorat, France, Université de Bordeaux 1.

Boeche, S., & Beyria, P. (2001). Collection « *À nous les maths* ». Conseillère scientifique Janine Duverneuil / Toulouse : Ed. Sedrap , DL 2001.

Brousseau, G. (1998a). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (1998b). Les obstacles épistémologiques, problèmes et ingénierie didactique. In G. Brousseau, *Théorie des situations didactiques* (pp. 115-160). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Brousseau, G. (2003). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques*. Retrieved from http://pagesperso-orange.fr/daest/guybrousseau /textes/Glossaire_Brousseau.pdf.

Chevallard, Y. (1989). *Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel.* Intervention au séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Gras, R. (1999). Métamorphoses d'exercices. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public*, 422, 335-346,

Johsua, S. & Dupin, J.-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématique.* Paris : Presses Universitaires de France.