Étude des fonctions algébriques dans le cadre d'un Parcours d'Étude et de Recherche dans l'école secondaire : le cas des fonctions rationnelles

VIVIANA CAROLINA LLANOS, MARÍA RITA OTERO, MARÍA PAZ GAZZOLA

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT)
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA).
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Argentina
vcllanos@exa.unicen.edu.ar
rotero@exa.unicen.edu.ar
mpgazzola@gmail.com

RÉSUMÉ

Cette recherche propose de mettre en place la Pédagogie de la Recherche et du Questionnement du Monde dans des classes de mathématiques de l'école secondaire argentine. On présente quelques résultats d'introduire un Parcours d'Étude et Recherche (PER) monodisciplinaire avec élèves de 14-16 ans. Dans ce travail nous décrivons l'Organisation Mathématique de Référence (OMR), et les résultats obtenus le long d'une étude longitudinale qui dure deux ans avec les mêmes étudiants. Nous analysons les caractéristiques de l'Organisation Mathématique (OM) reconstruite par rapport à l'activité mathématique qui se développe dans le PER.

MOTS-CLÉS

Parcours d'Étude et Recherche (PER), fonctions algébriques, école secondaire

ABSTRACT

This research proposes to introduce the Pedagogy of Research and Questioning the World in the classes of mathematics in the secondary school. We presents some results of introducing a Research and Study Courses (RSC) at the secondary school in Argentina with students of 14-16 ans. In this communication the Mathematical Organization of Reference (MOR) and the results obtained along a longitudinal study that lasts two years with the same students, both are described. The characteristics of the Mathematical Organization (MO) reconstructed with relation to the mathematical activity that is developed in the RSC, is analyzed.

KEYWORDS

Research and Study Courses (RSC), algebraic functions, secondary school

INTRODUCTION

Dans ce travail on présente des résultats d'une recherche qui essaie d'introduire d'une manière locale et contrôlée la Pédagogie de l'Enquête et du Questionnement du Monde (Chevallard, 2013) dans les classes habituelles de l'école secondaire en Argentine, au moyen du développement de un Parcours d'Étude et Recherche (PER) monodisciplinaire et finalisé. Le PER part de la question génératrice Q_0 *: comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes, si l'on connaît seulement leur représentation graphique et l'unité sur les axes ?* L'élaboration d'une réponse à cette question engendre des parcours qui permettent une couverture relativement complète des programmes des trois dernières années de l'école secondaire en Argentine (14-18 ans).

On décrit ici les questions possibles dérivées de Q_0, et particulièrement les réponses obtenues dans la dernière partie du parcours pour la question: *Comment effectuer le quotient des fonctions polynômiales, si l'on connaît seulement leur représentation graphique et l'unité sur les axes?* La réponse Q_d permet de reconstruire l'OM des fonctions rationnelles.

CADRE THÉORIQUE

On utilise la notion de PER introduite par Chevallard (2004, 2009) dans la Théorie Anthropologique du Didactique *(TAD).* La TAD propose d'enseigner depuis un nouveau paradigme nommé Pédagogie de l'Enquête et du Questionnement du Monde (Chevallard, 2013), pour substituer au paradigme dominant le dit « de visite aux œuvres ».

Les PER permettant de reformuler les programmes d'études à partir d'un ensemble de questions « cruciales » ou « génératrices », au même temps, cela requiert redéfinir le modèle d'enseignement traditionnel et la pédagogie dominante. Les programmes d'études devraient consister en paires de questions et de réponses $P = (Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$ générées par la question Q_0 nommée « génératrice ». La générativité de Q_0 est cruciale dans les PER, donc elle produit l'émergence des plusieurs Organisations Mathématiques (OM).

Le schème que Chevallard nomme *herbartiene développé* $[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}] \rightarrow R^\heartsuit$ exprime les caractéristiques et la manière d'élaborer la réponse dans un PER: elle doit s'organiser autour d'une question génératrice (Q_0) et elle doit permettre la création d'un milieu M, $M = \{R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, Q_{n+1}, ..., Q_m, O_{m+1}, ..., O_p\}$ conformé par les réponses « déjà faites » $R^\lozenge_{i\ 1\leq i\leq n}$ existantes dans la culture, ces qui peuvent être fournis par des livres, des enseignants, l'internet, etc.- ; les questions dérivées de Q_0 dénommées Q_j, qui dirigent l'étude dans M ; et les œuvres qui doivent s'étudier considérées comme potentiellement utiles pour trouver une réponse à R, les O_j entre celles-ci théories, praxéologies mathématiques ou d'autre discipline, etc. Finalement, la réponse $R^\heartsuit$ est le résultat du procès d'étude.

La génération du milieu requiert des modifications importantes par rapport à la pédagogie dominante, qu'ils affectent au processus d'étude, et à la « vie » du PER ; réglés par les fonctions didactiques *topogenèse*, *mésogenèse* et *chronogenèse* (Chevallard, 2011).

- La *mésogenèse*, le processus de construction du milieu M, est élaboré pour générer tant les réponses internes (ce pourraient être R_x produits par un élève x, ou par le professeur R_y) ou externes, n'importe quel. Dans un PER, le milieu il n'est pas déterminé d'avance, est « construit par la classe ». Elles sont différentes, les œuvres qui peuvent être appelé de construire le milieu, et elles ne peuvent pas être exclues comme elle pourrait arriver dans l'enseignement traditionnel. Le milieu doit-il offrir des outils idéaux pour construire et pour justifier chaque réponse partielle et la $R^\heartsuit$ qui est construit comme résultat du processus.
- La *topogenèse* est la fonction qui lie comment s'occupent les espaces du groupe d'élèves X et le professeur $\{y\}$. Les modifications dans la *topogenèse* vont à la paire des échanges dans

la *mésogenèse* étant donné que les changements de rôles affectent aussi comme les résultats qui peuvent être obtenus dans le milieu; en tenant en compte que les modifications dans le milieu se rendent à l'intérieur de la classe et non est seulement une responsabilité de *y*.

- La *chronogenèse* est une fonction qui règle les temps didactiques pour les composants distincts du système didactique. Cette composante est relative au temps réel requis pour effectuer l'étude d'une question, c'est ce qu'elle permet de différencier les PER des autres dispositifs didactiques. La construction du moyen *M* durant le processus d'étude implique que les temps d'étude sont supérieurs que ceux d'un enseignement traditionnel.

Depuis le référentiel théorique décrit le travail essaie de répondre aux questions: Quelles organisations mathématiques pourrait-on reconstruire dans le PER proposé ? Quelles caractéristiques des fonctions rationnelles liées à l'organisation de référence, ont été possibles de reconstruire? Quelles sont les caractéristiques de l'activité mathématique dans le PER développé ?

MÉTHODOLOGIE

On a développé une étude exploratoire longitudinale, qualitative et ethnographique pour introduire un PER dans des classes de l'école secondaire obligatoire en Argentine, dans un contexte particulier. Il s'agit d'une étude longitudinale pendant deux ans consécutifs, avec les mêmes étudiants.

Description du contexte

L'éducation secondaire en argentine a une durée de six ans. En raison des caractéristiques de la question génératrice, ce parcours s'est développé dans les trois dernières années. Le PER pourrait couvrir partiellement le programme des trois dernières années du secondaire (4^{e}, 5^{e} et 6^{e} année). Notre recherche a commencé au début de la quatrième année du secondaire et a continué pendant l'année suivante, c'est-à-dire pendent la cinquième année.

Le projet a été réalisé avec deux cohortes, dans la première, il y avait 59 étudiants qui ont tous terminé l'année. Dans la deuxième cohorte, 56 étudiants ont commencé et 53 ont terminé. Dans les quatre mises en œuvre réalisées, 112 étudiants ont participé à l'étude longitudinale. Ils ont travaillé en groupes de quatre personnes au maximum, et il y avait huit groupes dans la même salle. Les groupes n'ont pas été formés par l'enseignant, par contre, chaque étudiant devait choisir ses collègues de travail dans la salle. Toutes les mises en œuvre ont été développées par les enseignants de l'équipe de recherche.

Sur la collecte et l'analyse des données

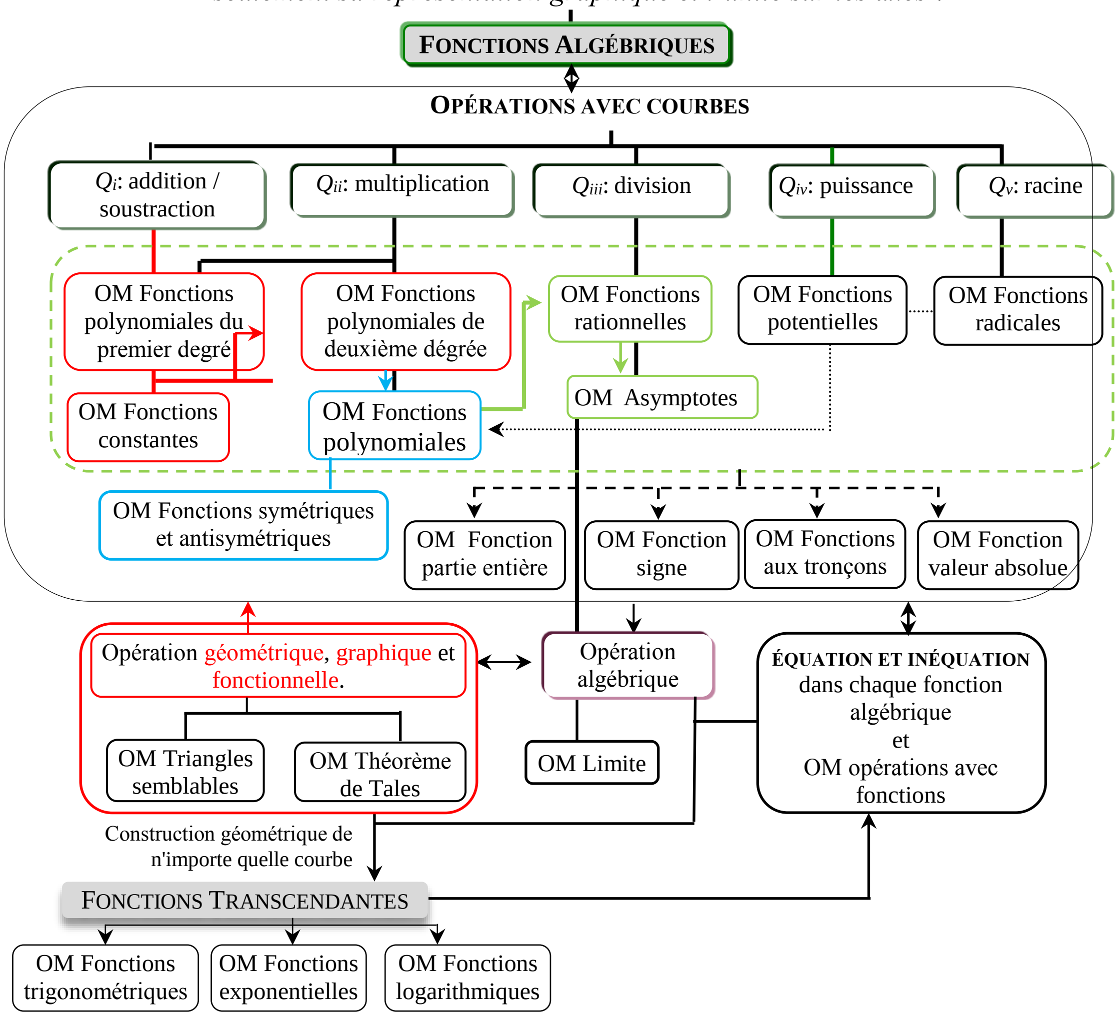
Les protocoles écrits de chaque étudiant ont été recueillis dans toutes les classes. Les classes ont été enregistrées en audio, parce que les enregistrements vidéo sont interdits par les autorités scolaires. Des prises de notes en classe ont été réalisées par les observateurs.

ANALYSE A PRIORI ET INTRODUCTION DU PER DANS LA CLASSE

Le PER part de la question la génératrice Q_0 *: comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes si l'on connaît seulement leurs représentations graphiques et l'unité sur les axes ?* (Llanos & Otero, 2013). L'analyse a priori des questions possibles dérivées de Q_0, par rapport aux opérations et aux courbes, a montré que Q_0 permettrait de reconstruire les caractéristiques principales des fonctions algébriques. Ainsi, on a proposé une Organisation Mathématique de Référence (OMR), composée de quelques OM que l'on pourra rencontrer pendant le parcours, et de plus, ces organisations font partie du curriculum des trois dernières années de l'école secondaire en Argentine (voir figure 1).

FIGURE 1

***Q_0:** Comment agir des opérations avec n'importe quelles courbes, s'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes ?*



Représentation des OM possibles, et les étudiées dans le PER

Les différentes OM invoquées par la même question Q_0, seront à la fin déterminées par le choix des courbes et de l'opération à réaliser entre elles, quand on connaît seulement la représentation graphique des courbes et l'unité sur les axes. Les OM reconstruites ont ainsi été établies à partir des courbes et des opérations que les étudiants ont choisies. Les lignes rouges, bleues et vertes de la figure 1 indiquent le parcours réalisé dans cet ordre, et permettent de se rendre compte de la couverture partielle du PER développé jusqu'à ce moment.

Parmi les réponses données par les étudiants à Q_0 prédominent principalement les opérations : adition, soustraction, produit, quotient, racine et puissance avec des droites. Ainsi, selon le choix des élèves, des OM différentes sont relatives à :

- l'adition et la soustraction entre des droites, qui permet de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales de premier degré ou constantes ;
- la multiplication de deux droites, qui permet de reconstruire l'OM des fonctions polynômiales du deuxième degré ;
- la multiplication de trois droites, ou des paraboles et des droites, ou entre paraboles, qui permet de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales ;
- la division entre des fonctions polynomiales qui permet de reconstruire l'OM des fonctions rationnelles.

En particulier, la multiplication de deux droites conduit à l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré, qui se trouve dans le programme d'études de la 4^{e} année. D'autres possibilités comme la multiplication de plus de deux droites ou la division qui est aussi proposée par les étudiants comme réponse à Q_0, s'étudieront plus tard. L'addition et la soustraction des droites ne sont pas considérées, parce qu'elles conduisent aux notions connues par les élèves, puisque les fonctions affines, constantes et linéaires sont déjà étudiées auparavant. Dans cette recherche, l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré, l'OM des fonctions polynomiales et l'OM des fonctions rationnelles se sont retrouvées dans cet ordre, bien qu'il s'agisse de possibilités parmi d'autres dans le parcours proposé. Alors, le PER développé dans ce cas, répond aux questions dérivées de Q_0 :

- Q_1 : *Comment effectuer la multiplication de deux droites, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes ?*
- Q_2 : *Comment effectuer la multiplication de plus de deux droites ou droites et des paraboles ou des paraboles, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes ?*
- Q_3 *: Comment effectuer la division entre des fonctions polynomiales, si l'on connaît seulement ses représentations graphiques et l'unité sur les axes ?*

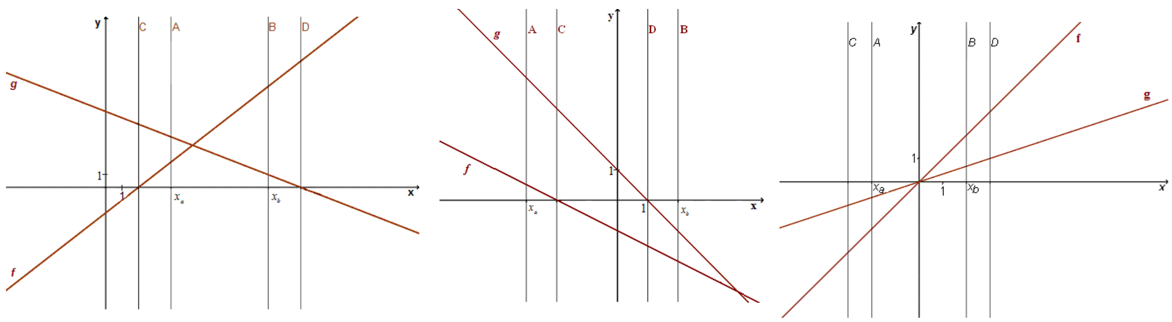
Les techniques développées dans une partie du parcours peuvent s'étendre dans d'autres parties. On décrit tout de suite quelques résultats de la dernière partie du PER (P3) relative à l'étude du quotient des fonctions polynomiales ; qui permet de reconstruire l'OM des fonctions rationnelles. Les parties précédents (P1 y P2) seront mentionnées brièvement.

P1: L'OM DES FONCTIONS POLINÔMIALES DE DEUXIÈME DEGRÉ

Le PER commence par la question Q_1. L'enseignant a proposé la situation suivante:

Les fonctions f et g sont données par les graphiques des Figures. Toutes les droites A//B//C//D, sont perpendiculaires à l'axe x. La fonction h=f·g.

FIGURE 2



Graphiques des fonctions f et g

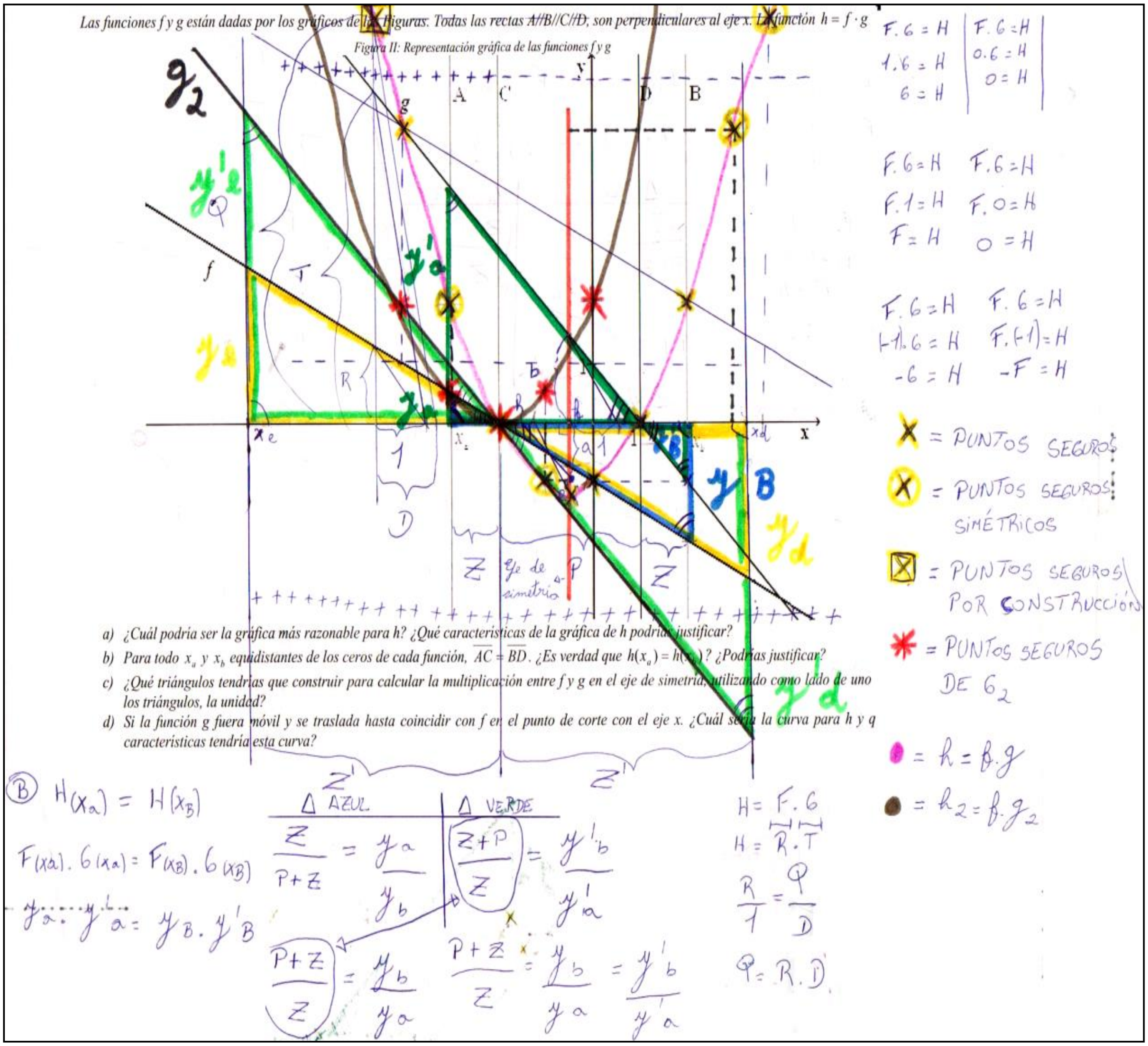
(a) Quelle serait la graphique plus raisonnable pour h? Quelles caractéristiques du graphique de h pourrais-tu justifier?
(b) Pour toutes x_a et x_b équidistantes des zéros de chaque fonction, $\overline{CA} = \overline{BD}$. C'est vrai $h(x_a) = h(x_b)$? Pourrais-tu justifier?
(c) Quels triangles faudrait-il construire pour calculer la multiplication entre f et g sur l'axe de symétrie, en utilisant l'un des côtés d'un des triangles, l'unité?

La graphique raisonnable pour la courbe qui est le produit des droites a été obtenu par les élèves. Ils construisent des points qu'ils appellent « sûrs »: des zéros, dans quelques cas, l'un négatif, ou des multiples de l'unité et les signes de *h* (C^+ et C^-). Le processus de démonstration de la symétrie de la courbe et la construction géométrique du sommet, permettent aux élèves de développer une technique qui est très utile pour augmenter la quantité des « points sûrs ». La technique est basée sur la construction des triangles semblables, qu'ils doivent choisir d'une manière appropriée au même temps qu'ils utilisent l'unité (Llanos & Otero, 2013, p. 20). Les élèves utilisent la technologie du Théorème de Thales et la proportionnalité des segments pour expliquer la technique qu'ils ont développée.

Le protocole de l'étudiant A39 (voir figure 3) a été choisi pour montrer l'activité des élèves. Cet élève construit des points sûrs (zéros, uns, l'un négatif), il démontre la symétrie de la courbe pour des points qui sont placés à la même distance des zéros au moyenne du théorème du Thales, et il identifie aussi des points symétriques. Ainsi, les étudiants augmentent la quantité des points sûrs, en utilisant la technique qu'ils ont construite à l' avance, et ils peuvent obtenir une graphique plus précise de *h*. De plus, en analysant ce qui s'est passé quand une des droites est déplacé jusqu'au point où les deux coïncident sur l'axe des abscisses, on peut étudier les propriétés des zéros comme résultat d'opérer avec des courbes. A39 justifié aussi sa symétrie, et ainsi, il arrive à la conclusion qu'il existe un point minimal ou maximal dans la moitié du segment qui a pour extrêmes les zéros. Depuis le cadre géométrique, on a aussi remarqué des propriétés de racines paires et impaires.

Après, en rentrant dans le cadre analytique on trouve des résultats significatifs. Les techniques développées pour répondre au problème de la multiplication des droites dans P1 peuvent s'étendre dans P2.

FIGURE 3



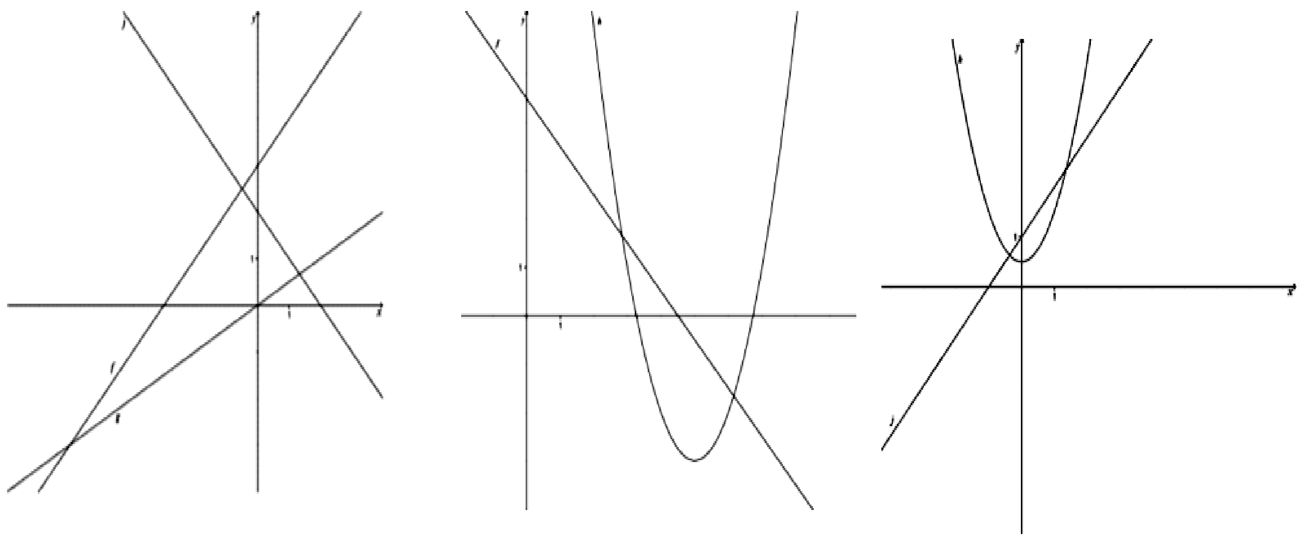
Protocole de l'élève A39

P2: L'OM DES FONCTIONS POLYNOMIALES

Dans la deuxième partie du PER, l'activité est générée par Q_2 (Llanos, Otero & Colombo, 2015). On peut construire les courbes à partir des droites et des paraboles que l'on propose de multiplier, et les caractéristiques de *p* sont construites en utilisant des techniques développées par les étudiants pendant l'année précédente.

Les fonctions f, g et j ou f et h sont données par les graphiques de la figure 4. La fonction p est telle que : $p = f \cdot g \cdot j$ *ou* $p = f \cdot h$ *par exemple :*

FIGURE 4



Graphiques des courbes f, g, j et h

a) Quels sont les ponts sûrs et les signes de p ?
b) Quelle serait le graphique le plus probable pour p ? Quelles caractéristiques du graphique de p pourrais-tu justifier ?

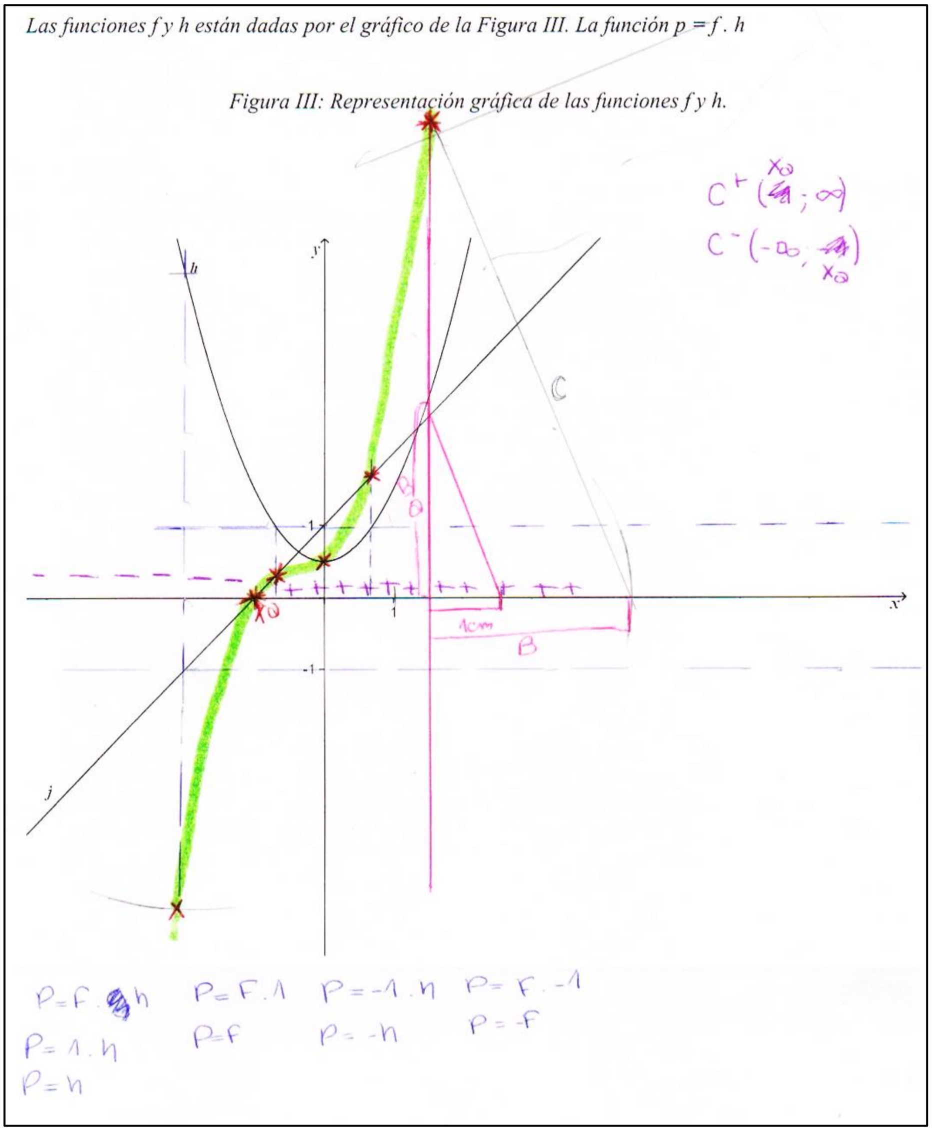
Pour répondre à Q_2 les élèves continuent avec l'étude initialement basée sur les points sûrs : les zéros, « les uns », « les uns négatifs ». Au préalable, ils analysent le signe du produit - en employant le zéro - cette action est très utile pour ceux-ci quand ils essaient d'obtenir la courbe de *p*. Les élèves reprennent de l'année antérieure la technique du calcul géométrique pour obtenir des points de la courbe qui ne sont pas liés aux points remarquables ou aux multiples de l'unité. Ainsi la deuxième partie du PER, P2, est basée sur une généralisation de techniques développées dans la première partie (P1).

Le protocole de l'élève A7 (voir figure 5) illustre l'utilisation des techniques construites auparavant. La reprise de la technique pour obtenir des points pour n'importe quelle abscisse, permet aux élèves d'analyser le comportement des branches infinies de *p*. Il est évident que la puissance des techniques géométriques pour obtenir n'importe quelle courbe résulte d'autres techniques déjà connues.

En reprenant Q_0, on a posé aux étudiants le problème d'effectuer la division entre les fonctions polynomiales, si l'on connaît seulement leurs représentations graphiques et l'unité sur les axes. Dans ce travail on décrit principalement des résultats obtenus dans la dernière partie du PER relative à l'OM des fonctions rationnelles.

2017, 4(1), p. 1-16, ISSN: 2241-9152

FIGURE 5



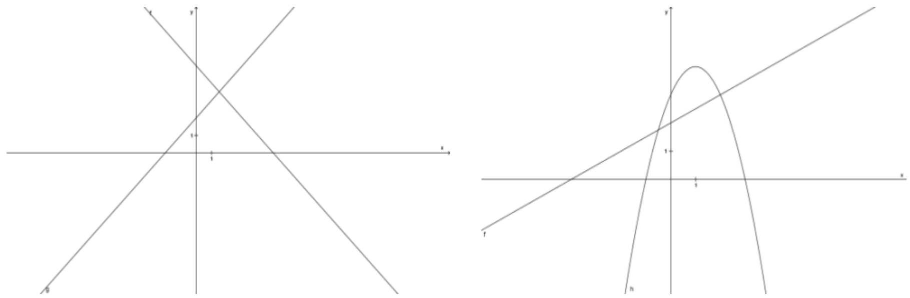
Protocole de l'élève A7

P3 : L'OM DES FONCTIONS RATIONNELLES

Dans la troisième partie du PER, P3, on étudie la question dérivée de Q_0, Q_3 *: Comment effectuer la division entre les fonctions polynomiales, si l'on connaît seulement leurs représentations graphiques et l'unité sur les axes ?* (Gazzola, Llanos & Otero, 2013). L'accent est mis sur l'obtention d'une courbe acceptable pour q, où $q = \frac{p}{r}$ et p et r sont des polynômes avec $r \neq 0$. Dans les deux cas on cherche à construire un graphique pour les fonctions rationnelles q en partant des questions introduites par l'enseignant :

Les fonctions f, g et h sont données par les graphiques de la figure. La fonction q est telle que : $q = \frac{f}{g}$ *ou* $q = \frac{f}{h}$ *respectivement.*

FIGURE 6



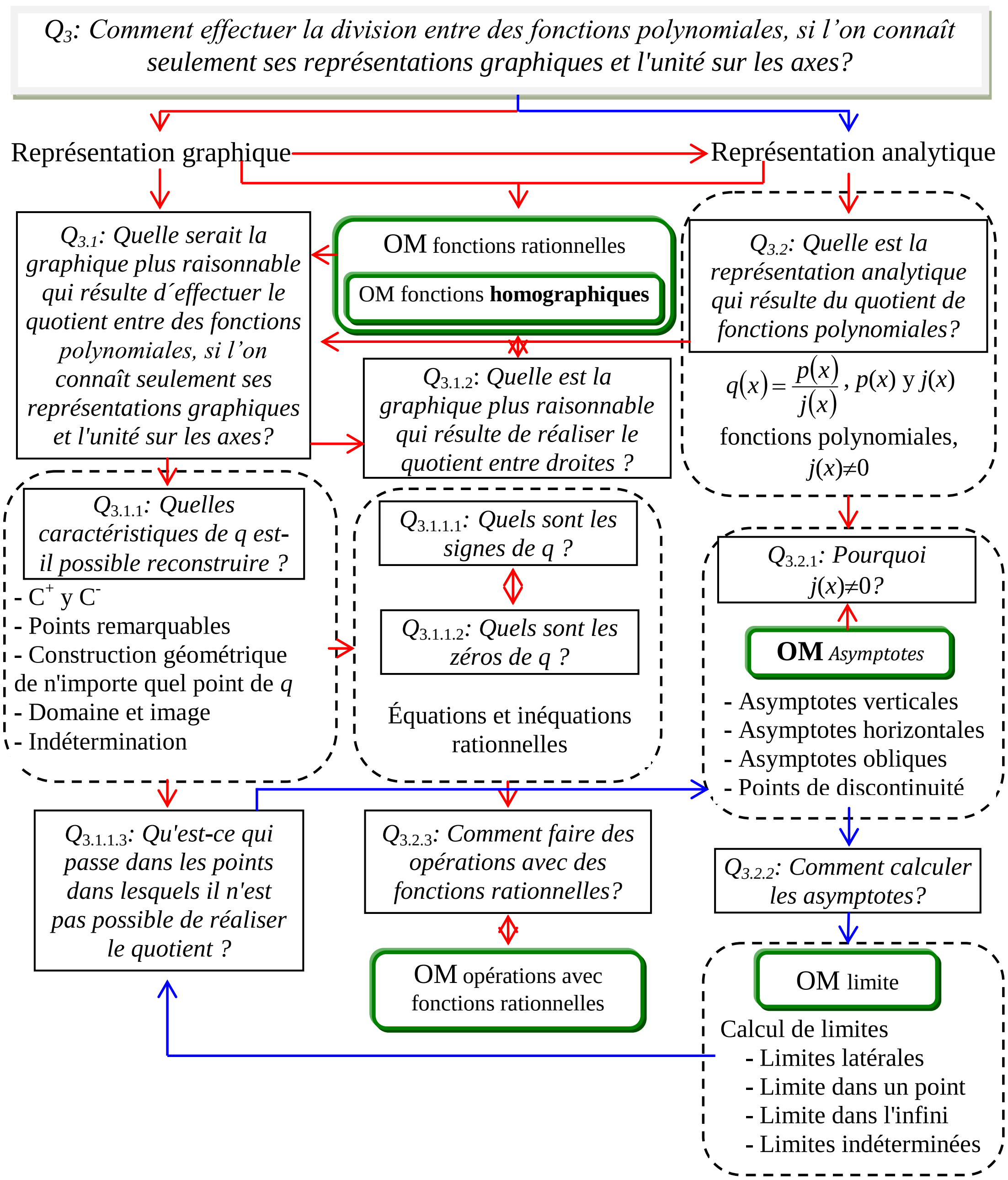
Représentation graphique des courbes f, g y h

(a) Quelle serait le graphique le plus probable pour q?
(b) Quelles caractéristiques du graphique de q pourrais-tu justifier?
(c) Est-ce- que q est une fonction?

Les étudiants obtiennent une courbe pour *q*, ils identifient les points sûrs et les signes de *q* en utilisant les zéros, l'intersection des fonctions représentées ; les points où l'ordonnée prend la valeur 1. Pour obtenir d'autres points ils adaptent et modifient pour le cas du quotient, la technique qu'ils maîtrisent déjà pour la multiplication. De plus, ils sont arrivés à la nécessité d'analyser une caractéristique fondamentale des fonctions rationnelles : le cas où le diviseur prend la valeur zéro. Ils identifient ces points et ils analysent le comportement de la fonction et de son graphique pour les points proches du « zéro du dénominateur ». Ils considèrent aussi le cas où le dividende et le diviseur prennent la valeur zéro simultanément, ce qui permet entre autres choses, d'étudier l'existence de *q* et de ses asymptotes. Le graphique qu'ils ont pu construire correspond à la représentation graphique d'une fonction rationnelle, si l'on exclut du domaine les valeurs qui annulent le dénominateur. Dans le cadre analytique, ils étudient des caractéristiques des fonctions rationnelles, en adaptant les techniques pour les fonctions polynomiales qu'ils connaissent déjà. Les OM possibles dérivées de Q_3 sont résumées dans la figure 7.

L'étude des fonctions rationnelles commence par le quotient des courbes des fonctions polynomiales. La figure 8 montre comment l'élève A68 a adapté les techniques pour multiplier des courbes, au cas du quotient entre des fonctions polynomiales. Il a construit *q* à partir des signes, des points remarquables et de l'intersection des courbes ; il a pris aussi les cas où le dénominateur prend les valeurs 2 ou 4, pour trouver en utilisant la médiatrice des segments, la moitié, le quart, etc. L'étudiant A68 a analysé et adapté la technique qui permet de construire un point ayant une ordonnée quelconque à la courbe de *q*. Ce protocole a été choisi pour mettre en évidence que les étudiants peuvent récupérer toutes les techniques déjà étudiées, les réadapter, et utiliser seulement celles qui sont pertinentes dans la situation étudiée. La classe a analysé le cas où le dénominateur prend la valeur zéro, en donnant comme conclusion que le graphique de q n'avait pas une ordonnée déterminée. Ce problème a été repris et approfondi dans le cadre analytique.

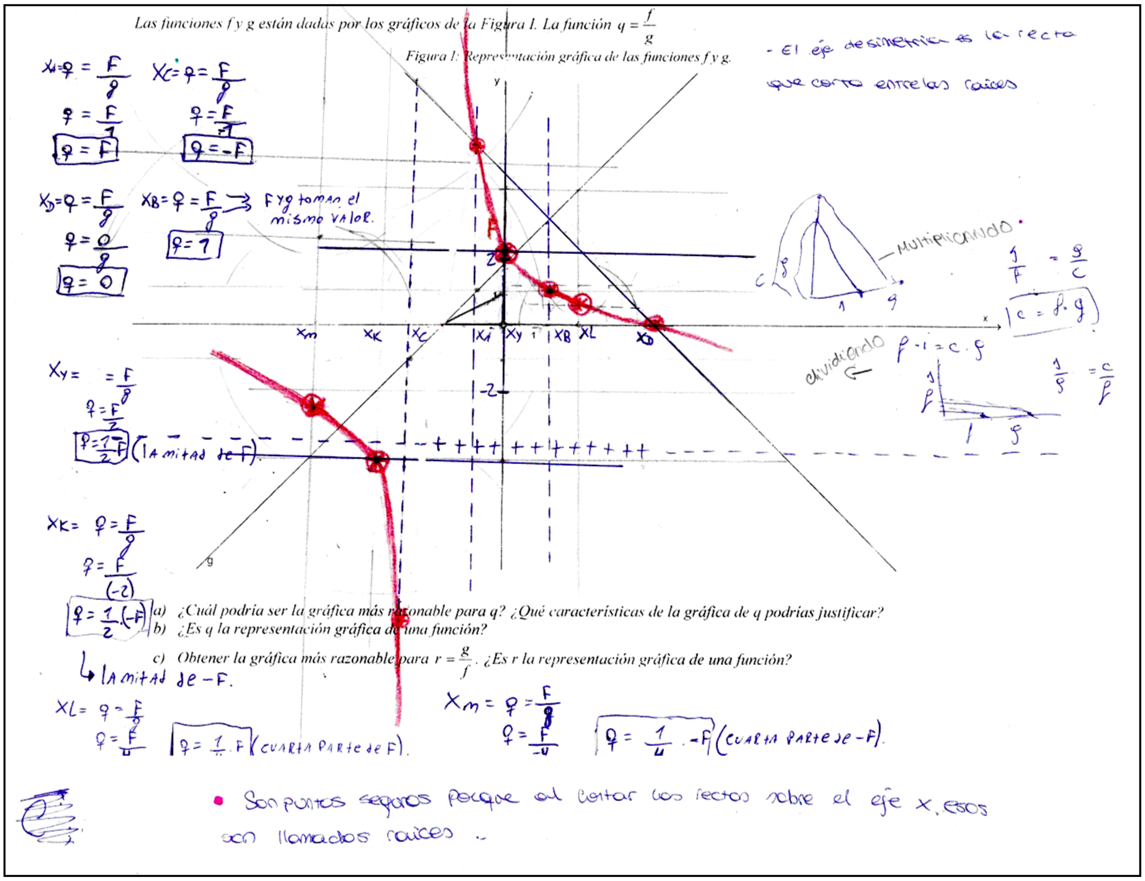
FIGURE 6



Description des questions dérivées et des OM que l'on peut rencontrer dans le PER

Le problème antérieur est repris dans le cadre analytique pour étudier les caractéristiques des fonctions rationnelles, quand l'on connaît les coordonnées sur les axes et quand il est possible d'obtenir une représentation algébrique de q.

FIGURE 8

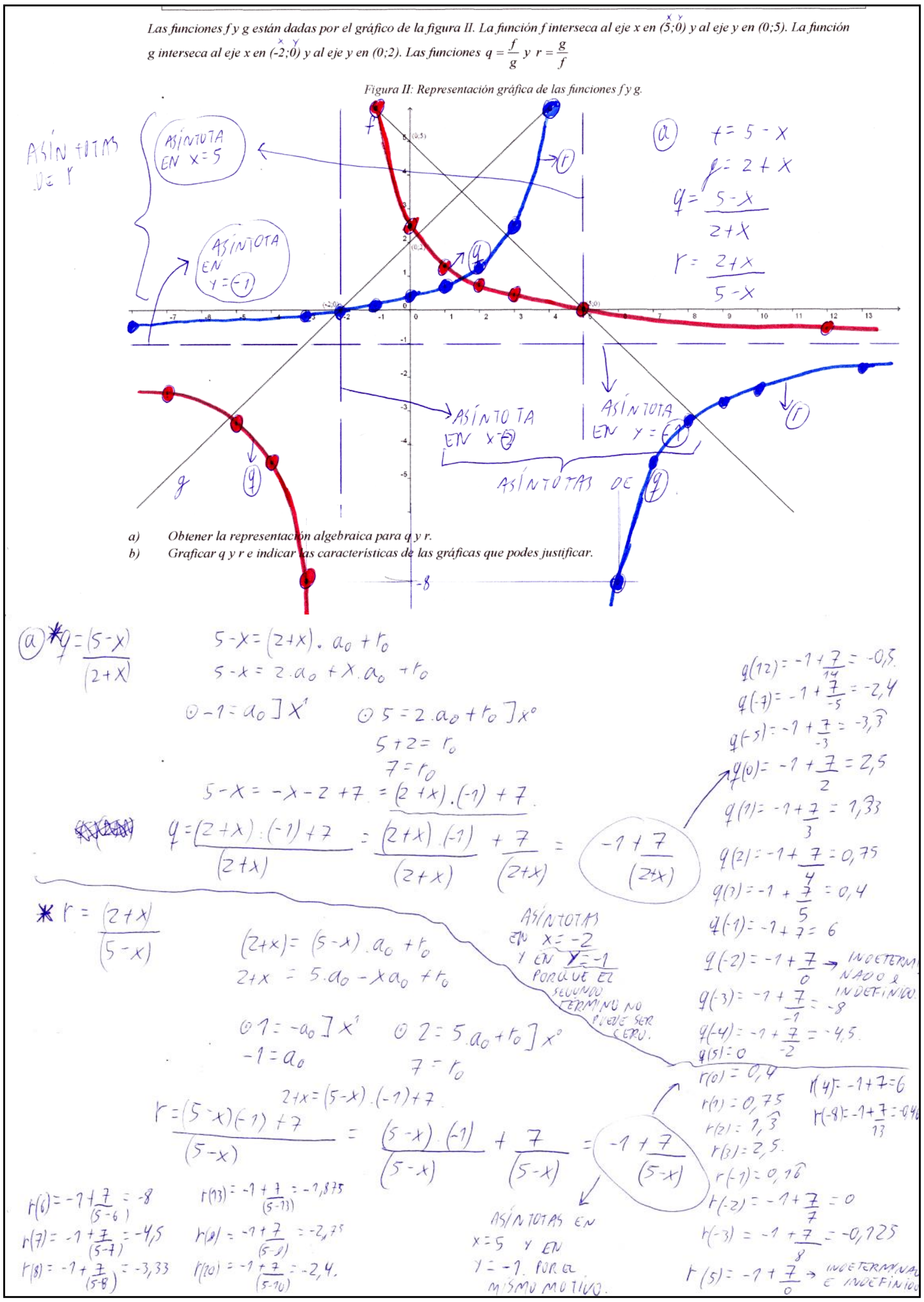


Protocole de l'élève A68

L'étudiant A61, a trouvé les représentations algébriques de f et g et de $q = \frac{f}{g}$ et de $q = \frac{g}{f}$. Ainsi, il a pu obtenir les points ayant n'importe quelle ordonnée pour q, les équations des asymptotes verticales (en analysant les zéros du dénominateur) et les asymptotes horizontales (en utilisant l'algorithme de la division et en évaluant des valeurs de la fonction q avec de très grandes valeurs des abscisses). Cela a permis aux étudiants de mieux comprendre et de mieux préciser le comportement de la courbe et d'obtenir une représentation graphique plus précise, comme le montre la figure 9.

Dans le cas du quotient entre une parabole et une droite, les étudiants ont aussi utilisé l'algorithme de la division et ils ont trouvé des asymptotes obliques, mais, seulement d'une manière graphique. Dans les expérimentations réalisées, le parcours n'a pas été orienté vers l'OM de la limite pour calculer les asymptotes, même quand les étudiants ont posé le problème des asymptotes, après avoir analysé les caractéristiques des courbes rationnelles. Il s'agit d'une difficulté du côté de l'enseignant, reconnue a posteriori. L'enseignant devait accompagner les étudiants, au lieu de stopper leurs initiatives ; mais, il ne l'a pas fait, il n'a pas pris le risque d'aller explorer l'OM des limites, ou le risque de s'engager dans tel chemin ouvert par telle question sur les asymptotes, il a eu peur de « perdre le contrôle » de la classe et de dilater le temps scolaire, avec ses conséquences pour l'accomplissement du programme scolaire. Cela est arrivé, même quand l'enseignant était aussi le chercheur, qui avait analysé au préalable le potentiel de la situation. Cependant, il a choisi de continuer avec les opérations concernant les fonctions rationnelles, au lieu d'aborder l'OM des limites.

FIGURE 9



Protocole de l'élève A61

Dans la dernière partie du parcours, ont été étudiées les opérations avec des fonctions rationnelles. Les étudiants ont construit et ont justifié des techniques pour réaliser l'addition, la différence, la multiplication et la division avec des fonctions rationnelles en utilisant des analogies avec les techniques employées pour réaliser les opérations avec des fractions.

Au préalable, quand ils ont étudié la multiplication de deux droites, les étudiants sont partis de la forme factorisée en obtenant tout de suite les formes polynomiale et canonique. De la même manière, dans la deuxième partie du parcours, les étudiants ont trouvé initialement la représentation analytique des fonctions polynômiales dans la forme factorisée (par le fait de commencer par le produit des courbes) et tout de suite ils ont trouvé l'expression générale développée. Cela permet non seulement d'étudier en donnant du sens, des formes différentes pour représenter la même fonction ; mais aussi pour établir des liens forts entre les représentations analytiques et graphiques. Le fait de commencer par les expressions factorisées semble avoir contribué aux résultats obtenus à la fin du parcours, surtout par rapport au travail des techniques de simplification et des opérations avec des fonctions rationnelles et ses propriétés.

Les résultats obtenus à la fin du parcours sont soutenus par les constructions faites tout au long des deux ans du PER. L'étude des questions dérivées de Q_3 relatives au quotient de courbes a permis :

- d'obtenir le graphique de q en utilisant la technique du calcul géométrique,
- d'identifier les points remarquables, les signes, et analyser le comportement de la fonction dans les points proches des asymptotes verticales, horizontales et obliques.

Dans le même temps il a été possible de construire des représentations équivalentes pour q au moyen du calcul algébrique du quotient de polynômes. Toutes les caractéristiques qui ont été obtenues dans la dernière partie du parcours, résultent d'une adaptation des techniques utilisées auparavant. Cela justifie l'importance du développement d'un PER pour les mêmes étudiants, pendant deux ans consécutifs.

QUELQUES CONCLUSIONS PARTIELLES

Dans cette recherche a été développé un PER finalisé, mono disciplinaire et viable dans le contexte de l'enseignement secondaire en Argentine. Le PER que nous proposons est finalisé par une question de viabilité. On ne peut pas mettre en œuvre un PER dans l'école secondaire dans l'ample sens proposé par Chevallard, parce qu'on ne peut pas être à l'intérieur de l'Institution et éviter le programme d'étude. On ne dispose pas non plus d'une infrastructure appropriée pour que un PER pouvoir pleinement se développer dans l'école secondaire en Argentine : il n'y a pas de bibliothèques à l'intérieur des salles, il n'y a pas de connexion à Internet; et prédomine principalement un enseignement traditionnel, basé sur explication du professeur aux étudiants au lieu des questions pour que les élèves étudient.

Le parcours proposé a permis de retrouver des différents OM à partir de Q_0, lesquels se trouvent dans le programme d'étude de l'école secondaire : des fonctions polynomiales de deuxième degré, des fonctions polynomiales et des fonctions rationnelles. D'autres parcours sont possibles à partir de la même question. Mais les connaissances des étudiants et les caractéristiques du programme font que le professeur décide de commencer par la multiplication de deux droites.

Pour faire la mise en œuvre dans la classe, il a été nécessaire d'introduire des gestes de la *pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde*, complètement différents de l'activité habituelle des élèves, on a rencontré des difficultés surtout au niveau de la topogenèse et de la chronogenèse. Si l'on considère la redistribution des responsabilités adoptée par l'enseignant et les élèves dans la classe, il existe entre la première et la troisième partie du PER des différences remarquables. Au commencement, les étudiants se refusaient à faire face aux questions, mais peu à peu et progressivement, ils ont assumé ces « nouvelles » responsabilités. L'enseignant a reçu des demandes constantes, parce que selon les critères des élèves, il devait leur expliquer, et il ne le faisait pas. L'une des principales difficultés pour le professeur est résister à la tentation d'attraper la craie et expliquer. L'attitude persévérante de l'enseignant et la négociation avec les étudiants, pour garantir aux élèves qu'il n'y avait pas de risques avec cette nouvelle manière de travail pour leur réussite scolaire, ont permis de réduire l'opposition initiale. Qualitativement, il est possible d'affirmer qu'au bout de deux ans, les étudiants n'ont plus peur de faire face aux questions.

Par rapport au chronogenèse, ou une gestion du temps scolaire, il y a aussi des différences entre les trois implémentations. Les modifications dans le temps pourraient s'expliquer par un plus grand domaine des techniques à mesure qu'il avance l'étude dans le PER. Ces modifications non s'attribuent seulement les étudiants, aussi le rôle de l'enseignant en tant que directeur de l'étude change positivement : domine mieux les temps, laisse un plus grand espace aux étudiants de présenter leurs idées, il permet une meilleure utilisation des techniques développées dans différents cadres pour développer des concepts et aussi permet récupérer des questions selon le PER progresse.

Les étudiants répondent aux questions en agissant sur le milieu et ils l'ont fait positivement, mais, comme l'enseignant a été le seul média disponible dans la salle, c'était lui qui avait le contrôle du milieu. Ceci s'explique par le fait que les étudiants ne pouvaient pas chercher « des réponses en dehors », dans une infrastructure scolaire qui manque d'une connexion à Internet, de possibilités d'accès opportun à la bibliothèque, des textes dans la salle, etc. Par conséquent, la gestion du milieu a été limitée à l'enseignant, par la propre nature du PER finalisé.

Cette expérience s'est déroulée sur une longue durée, pendant laquelle on a essayé de faire vivre certains gestes de la *pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde*. Cela a contribué au développement de certaines attitudes fondamentales, mais l'expérience n'a pas été suffisante pour que cette pédagogie s'exerce pleinement. D'une certaine manière les élèves ont montré la volonté de répondre à des questions, mais plus par le principe d'obéissance à l'enseignant que par leur propre volonté. Ils ont accepté les questions de l'enseignant et ils ont essayé de construire des réponses, et parfois, ils ont proposé des questions nouvelles.

Bien que nous partagions la nécessité d'introduire des changements radicaux dans les parcours proposés, nous ne réussissons pas à le réaliser dans les conditions actuelles de l'école secondaire en Argentine. Cependant, nous considérons que l'essai de faire vivre ce type de projet dans l'école secondaire, avec la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde, est déjà un progrès remarquable. Nous sommes conscientes qu'il y a des limitations pour aller au-delà d'un PER finalisé, comme celui qui a été proposé dans ce travail, dans une étude longitudinale. Mais si nous faisons la comparaison entre ce que nous avons réussi à réaliser et les résultats de la pédagogie dominante, il faut reconnaître qu'il s'agit d'une avance très importante.

RÉFÉRENCES

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. In *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon. Retrieved from http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. IUFM Toulouse, France. Retrieved from http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? En M. Bosch et al. (Eds), *Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico. Un panorama de la TAD*, Vol 1. (pp. 23-32). Cataluña, España : Centre de Recerca Matemàtica. Retrieved from http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(2), 161-182.

Gazzola, M. P., Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2013). Research and study paths in the teaching of Mathematics at secondary school relative to the Rational Functions. *Journal of Arts & Humanities*, *2*(3), 109-115.

Llanos, V. C., & Otero, M. R. (2013). Operaciones con curvas y estudio de funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*, *73*, 17-24.

Llanos, V. C., Otero, M. R., & Colombo, E. (2015). The polynomial functions as result of multiplying curves in the framework of a Research and Study Paths. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*; *4*(1), 80-98.