ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ, 4 (1987), 276-288

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ, ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΩΡΓΟΥ ΡΟΥΣΟΠΟΥΛΟΥ

«There is no mathematical substitute for philosophy.»
S. Kripke[1]

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Η ανάπτυξη των μαθηματικών τα τελευταία εκατό χρόνια είναι ραγδαία. Ο G. Temple υπολογίζει ότι περίπου 90% των μαθηματικών που γνωρίζουμε σήμερα είναι αποτέλεσμα ερευνών των τελευταίων εκατό χρόνων.[2] Αυτό το είδος ανάπτυξης δεν χαρακτηρίζει αποκλειστικά την περίπτωση των μαθηματικών, αλλά γενικότερα τις φυσικές επιστήμες.

Η μεγάλη ανάπτυξη των μαθηματικών συνοδεύεται από την εμφάνιση κάποιων προσπαθειών που αφορούν τη θεμελίωση της μαθηματικής πρακτικής και επιστήμης. Μια σειρά εξελίξεων και ανακαλύψεων στα μαθηματικά έπαιξαν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην εμφάνιση και ανάπτυξη ενός νέου, ξεχωριστού κλάδου — των θεμελίων των μαθηματικών. Σ' αυτές θα πρέπει να περιλάβουμε τη μελέτη της θεωρίας των συνόλων και των απολύτων αριθμών (Cardinals) από τον Cantor, καθώς και τη νέα μορφή της λογικής ως μαθηματικής ή συμβολικής λογικής από τον Frege.[3]

Το στάδιο της μελέτης των θεμελίων των μαθηματικών αποτέλεσε τον πρόδρομο της σύγχρονης φιλοσοφίας των μαθηματικών (φτμ). Όταν προς το τέλος του 19ου αιώνα οι μαθηματικοί αντιμετώπισαν παράδοξα και αντινομίες —λογικής και μαθηματικής φύσεως— η εμπιστοσύνη που έτρεφαν στη βεβαιότητα των μαθηματικών κλονίστηκε. Η κρίση που ακολούθησε τράβηξε το ενδιαφέρον πολλών και ικανών μαθηματικών. Διατυπώθηκαν μαθηματικές θεωρίες και απόψεις που αποσκοπούσαν να εξαλείψουν τα προβλήματα που είχαν εμφανιστεί. Ιδιαιτέρως, ο λογικός φορμαλισμός που επεξεργάστηκαν οι Russell και Whitehead στο μνημειώδες έργο τους Principia Mathematica χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο για τη διατύπωση και τη θεμελίωση των μαθηματικών. Στο στάδιο αυτό της μαθηματικής έρευνας οι μαθηματικοί/ερευνητές αποκόμισαν πλούσιες εμπειρίες οι οποίες αποκρυσταλλώθηκαν σε φιλοσοφικές θέσεις και μαθηματικά προγράμματα. Πρόκειται για τις γνωστές μας σχολές των μαθηματικών: το λογικισμό, τον ιντουισιονισμό και το φορμαλισμό/περατοκρατισμό (finitism). Από τις σχολές αυτές ξεχωρίζει ο ιντουισιονισμός του Brouwer επειδή διαφοροποιείται αισθητά από τις άλλες σχολές, τόσο στο μαθηματικό όσο και στο φιλοσοφικό επίπεδο. Οι μεταξύ τους διαφοροποιήσεις όμως δεν κατάφεραν να εκφραστούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να βρεθεί γόνιμη διέξοδος. Αυτό απαιτούσε αμεσότερη φιλοσοφική παρέμβαση και ουσιαστικά σημειώνει την έναρξη του κατεξοχήν σταδίου της φτμ. Η φτμ αυτονομείται τώρα από τα θεμέλια των μαθηματικών, τη μαθηματική λογική και τα μαθηματικά γενικότερα. Ωστόσο διατηρεί στενούς δεσμούς με τη μαθηματική πρακτική και ταυτόχρονα συνεργάζεται με τη φιλοσοφική λογική, τη φιλοσοφία της γλώσσας και τη φιλοσοφία των φυσικών επιστημών.

Αν ήθελε να διαγράψει κανείς χοντρικά τα ιστορικά στάδια εξέλιξης της φτμ, θα μπορούσε να αναφερθεί, πρώτα, γενικά στην περίοδο μέχρι και τον Καντ. Στο στάδιο αυτό, οι φιλοσοφικές απόψεις για τα μαθηματικά υπάγονται στο αντίστοιχο γενικό σύστημα των φιλοσόφων (λ.χ. Πλάτων, Καρτέσιος, Leibniz, Καντ).[4] Το δεύτερο στάδιο επεκτείνεται από το έτος 1879, έτος κατά το οποίο δημοσιεύεται η Εννοιογραφία του Frege,[5] μέχρι το έτος 1931, οπότε δημοσιεύονται τα θεωρήματα μη πληρότητας της αριθμητικής από τον Goedel.[6] Το στάδιο αυτό χαρακτηρίζεται από την ουσιαστική παρουσία των μαθηματικών/ερευνητών. Η μελέτη των θεμελίων και η ανάπτυξη της μαθηματικής λογικής είναι σχεδόν αποκλειστικά δουλειά των μαθηματικών/ερευνητών.

Η αναδιοργάνωση των κοινωνιών μετά από το δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο βρίσκει τη φτμ στο νεότερο στάδιο κατά το οποίο υπάγεται σχεδόν ολοκληρωτικά στην περιοχή της φιλοσοφίας. Σε αντίθεση με το δογματισμό των μαθηματικών σχολών του προηγουμένου σταδίου, τώρα παρατηρείται μετρημένη αισιοδοξία και κριτικό πνεύμα. Στο στάδιο αυτό η φτμ δεν είναι πλέον περιοχή των μαθηματικών· απομακρύνεται από τη μαθηματική πρακτική, στοιχειοθετεί και ορίζει νέα προβλήματα, τα οποία, παρά τη σχετική αυτονομία και ιδιομορφία τους, συνδέονται με άλλες σύγχρονες φιλοσοφικές πρακτικές, όπως η φιλοσοφία της γλώσσας και η φιλοσοφία των φυσικών επιστημών.

Παρακάτω θα αναφερθούμε αποκλειστικά στην τελευταία περίοδο της φτμ και, πιο συγκεκριμένα, θα περιοριστούμε σε τρεις κύριες κατευθύνσεις που διαγράφονται τελευταία. Κατά την περίοδο αυτή παρατηρούμε ότι καθώς απομακρυνόμαστε από την προβληματική των ιστορικών σχολών μεταφερόμαστε προς όλο και περισσότερο φιλοσοφικές διακρίσεις. Το φιλοσοφικό πλαίσιο τώρα θεωρείται ότι θα μας επιτρέψει καλύτερη επαναπροσέγγιση των ιστορικών σχολών και εκτίμηση της σύγχρονης μαθηματικής πρακτικής. Πριν προχωρήσουμε, θα αναφερθούμε σύντομα σε ορισμένες διακρίσεις που θα μας βοηθήσουν στην οριοθέτηση μερικών ζητημάτων της φτμ. Κατόπιν, θα αναφερθούμε στην επιστημολογική κατεύθυνση που ξεκίνησε με τον Quine. Πέρα από την ενδιαφέρουσα παραφυάδα του νομιναλισμού που εισήγαγε ο H. Field, στο τελευταίο κεφάλαιο αναφερόμαστε στην επίκαιρη διαμάχη μεταξύ ρεαλισμού και ιντουισιονισμού στα πλαίσια της ερμηνείας του Dummett.

1. ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΣΕΙΣ ΤΟΥ ΡΕΑΛΙΣΜΟΥ

Θα μπορούσε να μιλήσει κανείς για το ρεαλισμό ως το δόγμα σύμφωνα με το οποίο οι προτάσεις μιας περιοχής είναι αληθείς ή ψευδείς, και αυτό συμβαίνει εξαιτίας μιας πραγματικότητας που είναι ανεξάρτητη από το νου μας, τη γλώσσα μας, τα αισθητηριακά δεδομένα κλπ.[7] Χαρακτηριστική περίπτωση ρεαλισμού είναι ασφαλώς ο επιστημονικός ρεαλισμός αναφορικά με την πραγματικότητα των υλικών αντικειμένων του καθημερινού μας κόσμου. Κατ' αναλογία προς την αντικειμενική ύπαρξη των υλικών αντικειμένων, των μικροσωματιδίων και των πλανητών, θα νόμιζε κανείς ότι μπορούμε να δεχτούμε ότι οι πρώτοι αριθμοί λ.χ. και οι διαφορικές πολλαπλότητες συγκροτούν επίσης μια αντικειμενική πραγματικότητα. Μια τέτοια άποψη για τις χαρακτηριστικές μαθηματικές οντότητες (όπως λ.χ. οι αριθμοί, τα σύνολα, οι συναρτήσεις κλπ.) ονομάζεται συχνά πλατωνισμός και χαρακτηρίζει τα κλασικά μαθηματικά.[8] Με τον όρο «κλασικά μαθηματικά» δεν εννοώ κάποια μαθηματικά σε αντίθεση με κάποια νεότερα ή σύγχρονα. Με τον όρο αυτό, απλώς αναφέρομαι στο φιλοσοφικό υπόβαθρο των μαθηματικών που συνήθως διδάσκουμε και διδασκόμαστε.

Σύμφωνα με την πλατωνιστική αντίληψη —που δεν πρέπει να συγχέεται με τη φιλοσοφία του Πλάτωνος— υπάρχει μια μαθηματική πραγματικότητα η οποία είναι ανεξάρτητη από μας και τη γνώση μας. Ειδικά στον πλατωνισμό, η κατάσταση γίνεται ενδιαφέρουσα —και ταυτόχρονα προβληματική— όταν εγαταλείψουμε προσωρινά τις οντολογικές δεσμεύσεις και συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στην αλήθεια και το νόημα των προτάσεων που αναφέρονται στις μαθηματικές οντότητες. Έτσι το ερώτημα δεν είναι τι είδους αντικείμενα νομιμοποιούμαστε να πιστεύουμε ότι υπάρχουν αλλά μάλλον, τι είδους δεσμεύσεις προκύπτουν όταν δεχτούμε την αντικειμενική τους ύπαρξη. Σε ένα τέτοιο ρεαλισμό —μερικοί τον ονομάζουν σημασιολογικό ρεαλισμό (Semantic Realism)— η έννοια της αλήθειας παίζει κεντρικό ρόλο, γιατί κάθε καλώς σχηματισμένη πρόταση (σύμφωνα με το ρεαλιστικό δόγμα) είναι αληθής ή ψευδής ανεξάρτητα από μας και τις επιστημικές συνθήκες της γνώσης μας.

Στα πλαίσια μιας σαφούς οντολογίας των μαθηματικών αντικειμένων, μια επιμέρους κατεύθυνση του πλατωνισμού είναι η επιστημολογική κατεύθυνση του Goedel. Ο Goedel δέχεται ότι υπάρχει αναλογία μεταξύ υλικής και μαθηματικής πραγματικότητας με την έννοια ότι, όπως η αισθητηριακή αντίληψη/εποπτεία μας παρέχει γνώση των υλικών αντικειμένων, έτσι και η μαθηματική εποπτεία (Intuition) μας παρέχει γνώση των αξιωμάτων της συνολοθεωρίας.[9] Σύμφωνα με την ακραία αυτή μορφή πλατωνισμού (αφελής πλατωνισμός), η έννοια της αλήθειας προσαρτάται στις προτάσεις όπως το χρώμα και το σχήμα στα υλικά αντικείμενα.

Το φιλοσοφικό πλαίσιο του ρεαλισμού που σκιαγραφήσαμε με συντομία πιο πάνω μας επιτρέπει να διατυπώσουμε μερικά από τα ουσιαστικά ερωτήματα της φτμ. Είναι δυνατόν λ.χ. να διατυπώσουμε ένα συνεπές πρόγραμμα για μια εμπειριστική επιστημολογία των μαθηματικών; Ιδιαιτέρως, είναι δυνατό ένα τέτοιο πρόγραμμα στα πλαίσια του πλατωνισμού ή απαιτεί ένα ρεαλιστικό αλλά μη πλατωνιστικό πλαίσιο; (2) Μια άλλη δυνατότητα θα ήταν να εξετάσουμε αν μπορούμε να απαλλαγούμε τελείως από τις αφηρημένες μαθηματικές οντότητες και από το οντολογικό τους βάρος καταλήγοντας σε ένα νομιναλισμό τύπου Field (3). Επιπλέον, η διαμάχη μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών αφορά τη διαμάχη του πλατωνισμού με τον ιδεαλισμό (ή, με μια μορφή ιδεαλισμού); και πιο ειδικά, ποια είναι η σχέση της με τη σύγχρονη διαμάχη μεταξύ ρεαλισμού και αντιρεαλισμού (αναφορικά με τη θεωρία του νοήματος της γλώσσας);(4).

2. ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΜΠΕΙΡΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΓΝΩΣΗΣ

Από τότε που ο Quine δήλωσε πλατωνιστής αναφορικά με τα μαθηματικά αντικείμενα αρκετοί τον ακολούθησαν, και ο πλατωνισμός θεωρήθηκε μια «καθώς πρέπει» φιλοσοφία των μαθηματικών. Οι λόγοι που ώθησαν τον Quine να δεχτεί ότι υπάρχουν αφηρημένα μαθηματικά αντικείμενα (σύνολα λ.χ.) είναι έμμεσοι. Ο Quine δεν επιχειρηματολογεί ευθέως για την αντικειμενικότητα των μαθηματικών οντοτήτων. Πρόκειται κυρίως για ρεαλιστικούς λόγους (pragmatic) που προκύπτουν από τις ανάγκες των φυσικών επιστημών και των πρακτικών εφαρμογών τους, οι οποίες απαιτούν να εισαγάγουμε τα μαθηματικά αντικείμενα ως αντικειμενικές οντότητες (Indispensability Thesis).[10] Στην περίπτωση των φυσικών νόμων λ.χ., καθώς παρατήρησε ο Putnam, χρειαζόμαστε κατηγορήματα με πεδίο αναφοράς σύνολα μαθηματικών αντικειμένων (λ.χ. πραγματικούς και ρητούς αριθμούς).[11] Οι ανάγκες λοιπόν των φυσικών επιστημών μας εξαναγκάζουν να δεχτούμε μια οντολογία αντικειμένων στα οποία αποδίδουμε αντικειμενικότητα.

Ταυτόχρονα με τη θέση ότι είναι απαραίτητο να εισαγάγουμε μαθηματικά αντικείμενα, ο Quine μας παροτρύνει να θεωρήσουμε ότι τα μαθηματικά και οι μαθηματικές προτάσεις έχουν τον ίδιο χαρακτήρα, status με τις προτάσεις της θεωρητικής φυσικής και ειδικότερα, με τις προτάσεις που αναφέρονται σε μη παρατηρήσιμα αντικείμενα (Non-observables). Η συγγένεια που προτείνει ο Quine δεν αφορά μια επιστημολογική άποψη τύπου Mill.[12]

Ο Mill θεωρείται ο πρόδρομος μιας εμπειριστικής επιστημολογίας των μαθηματικών. Ο Mill διατυπώνει την εύλογη αρχικά διαίσθησή μας ότι η εμπειρία του υλικού κόσμου, όντας αρκετά πλούσια για να στηρίξει τις φυσικές επιστήμες, μπορεί κατ' ανάλογο τρόπο να στηρίξει και τα μαθηματικά (στοιχειώδη αριθμητική και γεωμετρία). Για τον Mill, δεν υπάρχει άλλη πραγματικότητα πέρα από αυτήν που συγκροτούν τα υλικά αντικείμενα και ο φυσικός κόσμος. Οι αριθμητικές αλήθειες τότε προκύπτουν ως επαγωγικές γενικεύσεις πραγματικών συμβάντων του κόσμου. Οι υπαρκτικές προτάσεις (προτάσεις με υπαρκτικό ποσοδείκτη) έχουν γνήσια και κυριολεκτική σημασία αφού βεβαιώνουν την υλική ύπαρξη κάποιων πραγμάτων με ορισμένες ιδιότητες.[13] Στην εκδοχή αυτή, τα μαθηματικά αποτελούν μια γενική —την πιο γενική— θεωρία των υλικών αντικειμένων και του κόσμου μας.

Μια θεμελίωση των μαθηματικών προς την κατεύθυνση του Mill —αν και αρχικά ευλογοφανής— δεν είναι τόσο πειστική σήμερα λόγω του αφηρημένου και θεωρητικού χαρακτήρα των μαθηματικών.[14] Η αντιστοιχία μεταξύ υλικού κόσμου και μαθηματικών δεν μας πείθει, την στιγμή μάλιστα που μερικοί αμφισβητούν ακόμα και την αντιστοιχία μεταξύ υλικού κόσμου και φυσικών θεωριών. Ιδιαιτέρως, οι μαθηματικές θεωρίες δεν είναι σε θέση να «σώσουν» τα φαινόμενα, αφού δεν υπάρχουν παρατηρησιακά δεδομένα τα οποία θα μπορούσαν να διαψεύσουν κάποιες μαθηματικές θεωρίες και κατασκευές.

Η εικόνα του Quine, αντίθετα, συνδέεται με τη διατύπωση ενός γενικότερου συστήματος θεωριών και δεδομένων που αναφέρονται στα αντικείμενα και τα συμβάντα του κόσμου. Ο Quine τοποθετεί στην περιφέρεια αυτού του συστήματος θεωρίες, προτάσεις και δεδομένα που συνδέονται με τις εμπειρίες και τα συμβάντα του υλικού κόσμου και επηρεάζονται άμεσα από αυτά. Καθώς μετακινούμαστε προς το κέντρο, οι προτάσεις και οι θεωρίες μας επηρεάζονται όλο και λιγότερο από τα συμβάντα και τα αντικείμενα του υλικού κόσμου. Προς το κέντρο λοιπόν, εύλογα, τοποθετούνται οι προτάσεις της θεωρητικής επιστήμης, οι λογικοί νόμοι και οι μαθηματικές θεωρίες.[15]

Οι προτάσεις και οι θεωρίες συγκροτούν έτσι ένα πυκνό, συνεκτικό όλον κατά τέτοιο τρόπο ώστε αν αλλάξουμε κάποιο νόμο ή θεωρία στο σύστημα, αυτό έχει ως συνέπεια ένα πρόγραμμα αλλαγών που διαπερνά ολόκληρο το σύστημα. Φυσικά, το πρόγραμμα των αλλαγών είναι ευρύτερο όταν αλλάξουμε κεντρικές θεωρίες του συστήματος. Γι' αυτό άλλωστε είμαστε συντηρητικοί στις αλλαγές, τείνουμε δηλαδή να αλλάζουμε περιφερειακές προτάσεις και όχι κεντρικές (λ.χ. δεν απορρίπτουμε τόσο εύκολα την αρχή του αποκλειομένου τρίτου). Ένα τέτοιο ολιστικό σύστημα (Holistic) χαρακτηρίζεται από το ότι η γνώση που προκύπτει —συνεπώς και η μαθηματική γνώση— δεν είναι ούτε a priori ούτε απόλυτη. Αντίθετα, η μαθηματική γνώση μπορεί να αλλάζει ως προς τις τιμές αλήθειας, δεν είναι αλάνθαστη.[16]

Το πρόγραμμα που προκύπτει από τις γενικές αυτές παροτρύνσεις του Quine είναι μια προσπάθεια να αποφύγουμε τον χοντροκομένο εμπειρισμό τύπου Mill – χωρίς ασφαλώς να εκπέσουμε σε έναν πλατωνισμό τύπου Goedel. Η γενικότητα όμως και η ασάφεια των απόψεων του Quine δεν επιτρέπουν τη λεπτομερειακή διατύπωση της εναλλακτικής λύσης που προτείνει. Ωστόσο, βοήθησε αρκετούς να αναλάβουν ένα εξορθολογισμένο εμπειριστικό πρόγραμμα που αποσκοπεί να θεμελιώσει τη γνωστική διαδικασία σε ασφαλή βάση, ενώ ταυτόχρονα αποβλέπει στην a posteriori γνώση των μαθηματικών.[17] Το στάδιο της γνωστικής διαδικασίας απαιτεί συνήθως δύο αναγωγές: σε μια πρώτη φάση, η γνώση ανάγεται σε ένα πλέγμα πεποιθήσεων/πίστεων του υποκειμένου για τις οποίες μπορούν να προσφερθούν κάποιες εγγυήσεις. Αντίστροφα, αν το υποκείμενο έχει στη διάθεσή του κάποιες εγγυημένες πεποιθήσεις αναφορικά με στοιχειώδεις μαθηματικές προτάσεις, τότε μέσω διαδοχικών αφαιρέσεων και εξιδανικεύσεων οδηγείται προς την κατεξοχή μαθηματική γνώση.[18] Σε μια δεύτερη φάση, μιλάμε για ένα πρόγραμμα γένεσης αρχικά και εξέλιξης κατόπιν των μαθηματικών ιδεών και της πρακτικής τους. Το πλέγμα της μαθηματικής γνώσης μια δεδομένη χρονική στιγμή, ανάγεται στα προηγούμενα ιστορικά πλέγματα από τα οποία προέκυψε. Το υποκείμενο τώρα θεμελιώνει τη μαθηματική γνώση που κατέχει ανάγοντάς την σε προηγούμενα στάδια μέσω αυθεντιών και πηγών (βιβλιοθήκες-βιβλία, σχολεία-δάσκαλοι, χώροι εργασίας-εργαζόμενοι κλπ.). Η αιτιακή αυτή αλυσσίδα διασυνδέσεων και μετάθεσης μιας συγκεκριμένης γνώσης από αυθεντία σε αυθεντία και από πηγή σε πηγή σταματάει στο «αρχικό» στάδιο γένεσης της γνώσης. Το «αρχικό» στάδιο συνδέεται άμεσα με την αισθητηριακή εμπειρία, η οποία άλλωστε σύμφωνα με την ερμηνεία που εξετάζουμε, αποτελεί εγγύηση της γνώσης που αποκομίζουμε.[19]

Το πρόγραμμα που σχηματικά διαγράψαμε παραπάνω απαιτεί για την στήριξή του να αναφερθούμε στη φύση της (ή μιας) μαθηματικής πραγματικότητας. Η παρέμβαση μιας έννοιας μαθηματικής πραγματικότητας στο όλο πρόγραμμα είναι τελείως εύλογη. Οι μαθηματικές προτάσεις ως αληθείς προτάσεις, δεν μπορεί παρά να αναφέρονται κάπου: σε τι είδους πράγματα λοιπόν αναφέρονται και ποιο είναι το οντολογικό status αυτών των πραγμάτων; Αν δεχτούμε την αντικειμενική ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων, των αριθμών λ.χ., όπως στον πλατωνισμό, τότε η διαμεσολάβησή τους στη γνωστική διαδικασία βοηθάει να συλλάβουμε τα μαθηματικά πρότυπα που υποστασιοποιούνται στα συγκεκριμένα υλικά αντικείμενα. Μια περισσότερο αριστοτελική λύση θα ήταν να ισχυριστούμε ότι τα συγκεκριμένα υλικά αντικείμενα μας «οδηγούν» τρόπον τινά στην ανακάλυψη αφηρημένων μαθηματικών προτύπων.

Αυτό που πρέπει να κρατήσουμε από τη σχετική διαδικασία είναι το γεγονός ότι μόνο εκ των υστέρων οδηγούμαστε σε κάποιες αφηρημένες οντότητες, δομές, πρότυπα κλπ., οι οποίες αποτελούν το κατ' εξοχήν αντικείμενο της μαθηματικής πρακτικής. Έτσι, δεν υπάρχει καμιά a priori εγγύηση για το χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης. Ασφαλώς, μετά από το «αρχικό» στάδιο γένεσης κάποιων μαθηματικών ιδεών ακολουθεί ένα περίπλοκο στάδιο εξέλιξης των ιδεών αυτών μέσω αφαιρέσεων, οι οποίες διαδραματίζονται μέσα σε κοινωνικά και ιστορικά πλαίσια. Παρά τον κοινωνικό και ιστορικό χαρακτήρα της γνώσης γενικά —και της μαθηματικής γνώσης ειδικότερα— η αφαίρεση και η εξιδανίκευση στα μαθηματικά του παρόντος αιώνα συχνά μας εξαπατούν δημιουργώντας την εντύπωση ότι η μαθηματική γνώση είναι προφανώς a priori γνώση. Η άποψη αυτή για τον a priori χαρακτήρα της μαθηματικής γνώσης έχει ιδιαίτερα μεγάλη απήχηση στην ιστορία του πολιτισμού και ιδιαιτέρως μεταξύ των μαθηματικών/ερευνητών – πράγμα που φαίνεται χαρακτηριστικά και στις ιστορικές σχολές των μαθηματικών.

Το εμπειριστικό πρόγραμμα μπορούμε να πούμε ότι προσπαθεί να συγκεκριμενοποιήσει μερικές κατευθύνσεις του Quine για τον a posteriori χαρακτήρα της γνώσης γενικά. Παρά την ευλογοφάνεια της ιστορικής συνιστώσας της γνώσης και της αναγωγής της γνώσης σε πεποιθήσεις, το κεντρικό ερώτημα που αφορά την προέλευση της μαθηματικής γνώσης από την εμπειρία και τη θεμελίωσή της σ' αυτή δεν αιτιολογείται επαρκώς. Ειδικά, η εντύπωση ότι όταν μεταφερόμαστε από το σημερινό στάδιο προς ένα «αρχικό» στάδιο γένεσης των μαθηματικών ιδεών, λύνεται το επιστημολογικό πρόβλημα, είναι απατηλή.[20] Το πρόβλημα απλώς μεταφέρεται και η αιτιολόγηση παραμένει ζητούμενο. Επιπλέον πρέπει να επισημάνουμε ότι το πρόγραμμα αυτό, ακόμα και στην πιο εκλεπτυσμένη μορφή που παρουσιάστηκε από τους Kitcher, Resnik, Maddy, μεταξύ άλλων, δεν ξεφεύγει από την αρχική διαίσθηση του Mill ότι τα μαθηματικά κατά κάποιο τρόπο περιγράφουν τα πιο γενικά, δομικά χαρακτηριστικά του κόσμου.

3. Ο ΝΟΜΙΝΑΛΙΣΜΟΣ ΤΟΥ FIELD

Ο νομιναλισμός στη φιλοσοφία των μαθηματικών χαρακτηρίζεται από την απόρριψη των αφηρημένων οντοτήτων ως αντικειμενικών οντοτήτων· για το λόγο αυτόν ο Resnik τον ονομάζει αντι-πλατωνισμό. Η βασική θέση ότι δεν είναι καθόλου αναγκαίο να δεχτούμε την ύπαρξη μαθηματικών αντικειμένων, αναδύεται τελείως εύλογα στα πλαίσια του προγράμματος που συζητήσαμε πιο πάνω. Για τον Quine οι λόγοι που επιβάλλουν να δεχτούμε μια μαθηματική οντολογία δεν είναι μεταφυσικοί αλλά πρακτικοί (pragmatic). Οπότε, θα μπορούσαμε να δοκιμάσουμε την ιδέα να απαλλαγούμε τελείως από τη μαθηματική οντολογία. Αλλά για να απαλλαγούμε από τη μαθηματική οντολογία πρέπει να δείξουμε —και αυτό αποτελεί το θετικό μέρος του νομιναλιστικού προγράμματος— ότι μπορούμε να διατυπώσουμε τις θεωρίες των φυσικών επιστημών, όπου βέβαια χρειάζεται να αναφερθούμε στα μαθηματικά αντικείμενα, χωρίς να καταφύγουμε σ' αυτά.

Πριν από την πρόσφατη προσπάθεια του Field, οι Goodman και Quine δοκίμασαν ένα τέτοιο εγχείρημα.[21] Περιόρισαν τη λογική σε ένα πρωτοβάθμιο σύστημα και προσάρτησαν σ' αυτό ένα λογισμό των συγκεκριμένων οντοτήτων (Individuals) του υλικού κόσμου. Παρά τον περιοριστικό χαρακτήρα ενός τέτοιου προγράμματος παραμένει ένα θετικό μέρος: τα αποτελέσματα στο σύστημα αυτό μπορούν να ενσωματωθούν στο σύστημα της κλασικής λογικής.

Με τον H. Field ξεκινάει ένα ακόμα πιο φιλόδοξο πρόγραμμα που αποσκοπεί να «ξεμπερδέψει» μια και καλή με τις μαθηματικές οντότητες. Για να δείξουμε ότι οι αριθμητικές λέξεις λ.χ. δεν έχουν τελικά αναφερόμενα αντικείμενα, ότι συνεπώς πρόκειται —σε τελευταία ανάλυση— για λέξεις κενές περιεχομένου, θα αρκούσε να δείξουμε ότι οι θεωρίες των φυσικών επιστημών μπορούν να θεμελιωθούν επαρκώς χωρίς καμιά ουσιαστική αναφορά σε μαθηματικές οντότητες. Αν υποθέσουμε ότι η περιορισμένη μορφή των θεωριών των φυσικών επιστημών που προκύπτει με τον τρόπο αυτό —χωρίς δηλαδή τις μαθηματικές οντότητες— είναι δυνατή, πρέπει επιπλέον να δείξουμε ότι η περιορισμένη αυτή μορφή μπορεί να επεκταθεί με μια εύλογη έννοια στη μορφή των θεωριών των φυσικών επιστημών όπου δεχόμαστε την ύπαρξη των μαθηματικών οντοτήτων.[22] Το πρόγραμμα του Field περιορίζεται στην παραδειγματική διαπραγμάτευση της Νευτώνειας θεωρίας της βαρύτητας· υποτίθεται ότι το πρόγραμμα μπορεί να γενικευτεί και να επεκταθεί στις άλλες θεωρίες των φυσικών επιστημών.

Η πραγματοποίηση του προγράμματος Field στηρίζεται, inter alia, σε μια σημαντική λεπτομέρεια στην οποία πρέπει να αναφερθούμε με συντομία. Πρόκειται για την παμπάλαια ιδέα ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε ποσοτικές σχέσεις με άλλες ισοδύναμες ποιοτικές σχέσεις. Η ιδέα χρησιμοποιήθηκε από τον Hilbert στην αξιωματοποίηση της γεωμετρίας του το 1899.[23] Έτσι, για να μιλήσουμε για τις σχέσεις των αποστάσεων μεταξύ τριών σημείων Α,Β,Γ (λ.χ. $\overline{AB}>\overline{A\Gamma}$) θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε μια μετρική σχέση — και έτσι έμμεσα, πραγματικούς αριθμούς. Ισοδυνάμως, θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε αντί αυτής της μετρικής σχέσης μια σχέση ομοιότητας (Congruence) μεταξύ των τμημάτων (ΑΒ), (ΑΓ) — λ.χ. το τμήμα (ΑΓ) είναι όμοιο προς ένα μέρος του τμήματος (ΑΒ), κλπ. Ο Hilbert στη συνέχεια αποδεικνύει ένα θεώρημα Απεικόνισης (Representation Theorem), σύμφωνα με το οποίο, για κάθε ένα από τα μοντέλα των αξιωμάτων που εισάγουμε υπάρχει ένας ισομορφισμός στο χώρο των πραγματικών αριθμών με βάση τον οποίο οι ποιοτικές γεωμετρικές σχέσεις απεικονίζονται σε ισοδύναμες αλγεβρικές, αναλυτικές σχέσεις. Ο Field δείχνει πώς με ένα αντίστοιχο τρόπο ένα τέτοιο θεώρημα μπορεί να επεκταθεί ώστε να καλύψει θεωρίες όπως η θεωρία της βαρύτητας κατά Νεύτωνα. Το συμπέρασμά του είναι ότι χάρις στα θεωρήματα Απεικόνισης μπορούμε να συνεχίσουμε να κάνουμε φυσική χωρίς να δεσμευόμαστε από τις οντολογικές δεσμεύσεις των μαθηματικών.

Ένα άμεσο πρόβλημα που θα πρέπει να αναμένεται από αυτή τη διαπραγμάτευση είναι ότι, περιορίζοντας και τελικά εξαλείφοντας τη μαθηματική οντολογία, επιβαρύνεται σε μεγάλο βαθμό η λογική και φυσική οντολογία. Κατά κάποιο τρόπο λοιπόν πρόκειται για μετάθεση του οντολογικού βάρους από μια περιοχή σε άλλη και όχι για γνήσια εξάλειψη οντολογικών προϋποθέσεων. Έτσι, η φυσική οντολογία του Field περιέχει μη αριθμήσιμο πλήθος φυσικών χωρο-χρονικών σημείων, τα οποία δομικά ισοδυναμούν με το χώρο των πραγματικών αριθμών.

Ανεξάρτητα από την αξία και την επιτυχία του προγράμματος Field,[24] μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα γενικό πρόβλημα που απασχολεί τον παλαιότερο φορμαλισμό των μαθηματικών (τον Thomae λ.χ.) και τον περατοκρατισμό του Hilbert (finitism) — φιλοσοφίες των μαθηματικών όπου οι οντολογικές δεσμεύσεις είναι περιορισμένες ή και ανύπαρκτες ακόμα. Πρόκειται για τις έννοιες της αλήθειας και του νοήματος των προτάσεων στα μαθηματικά. Στις νομιναλιστικές φιλοσοφίες των μαθηματικών οι προτάσεις δεν έχουν γνήσιο και αυτόνομο περιεχόμενο (νόημα) ενώ η έννοια της αλήθειας χάνεται τελείως ή διατηρεί μια επιμέρους σημασία καθώς μετατρέπεται σε μια συντακτική έννοια. Αυτές οι απόψεις έρχονται σε πλήρη αντίθεση με τον πλατωνισμό αλλά και με τον ιντουισιονισμό, όπως θα φανεί αμέσως πιο κάτω.

4. ΑΠΟ ΤΟΝ ΙΝΤΟΥΙΣΙΟΝΙΣΜΟ ΣΤΟΝ ΑΝΤΙΡΕΑΛΙΣΜΟ

Οι διαμάχες μεταξύ των ιστορικών σχολών των μαθηματικών υποδηλώνουν φιλοσοφικές διαμάχες. Ιδιαιτέρως, αυτό είναι φανερό στην περίπτωση του ιντουισιονισμού και τη σύγκρουσή του με τα κλασικά μαθηματικά. Οι διαφορές μεταξύ λογικισμού και φορμαλισμού/περατοκρατισμού είναι διαφορές που εκδηλώνονται στο κοινό πλαίσιο της πρακτικής των κλασικών μαθηματικών. Δεν έχουν χαρακτήρα ριζικής αντίθεσης, αφού τα μαθηματικά qua μαθηματική πρακτική είναι κοινά. Η περίπτωση του ιντουισιονισμού όμως είναι πραγματικά διαφορετική, επειδή τα ιντουισιονιστικά μαθηματικά αποτελούν νέο και διαφορετικό τρόπο/σύστημα μαθηματικής πρακτικής. Έτσι, μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών εμφανίζονται διαφορές στο επίπεδο των μαθηματικών αποτελεσμάτων. Το κλασικό θεώρημα των Bolzano-Weierstrass λ.χ. δεν ισχύει στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.[25] Ασφαλώς, τέτοιες διαφορές πρέπει να αναμένονται, αφού τελικά οι διαφορές αφορούν το λογικό σύστημα και τη σημασιολογία. Στα κλασικά μαθηματικά συνήθως προϋποθέτουμε μια αυτόνομη πραγματικότητα μαθηματικών αντικειμένων. Στο ρεαλιστικό αυτό πλαίσιο, στη συνέχεια, είναι εύλογο να θεωρήσουμε ότι κάθε πρόταση είναι αληθής ή ψευδής — ανεξάρτητα από την επιστημική κατάσταση της γνώσης μας. Αντίθετα, στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά δεν μπορούμε να δεχτούμε ότι οι προτάσεις είναι αληθείς ή ψευδείς ανεξάρτητα από τις δυνατότητές μας να τις αποδείξουμε ως αληθείς ή ψευδείς. Αυτή η σημασιολογική θέση έχει ως συνέπεια μια διαφορετική ερμηνεία των λογικών σταθερών και των ποσοδεικτών.

Η κριτική εξέταση της διαμάχης μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών δεν μπορεί να περιοριστεί τελικά στην απλή αντιπαράθεση μαθηματικών αποτελεσμάτων ούτε στην καταγραφή των διαφορετικών φιλοσοφικών προϋποθέσεων που υπεισέρχονται. Η διαμάχη ήρθε ξανά στην επικαιρότητα λόγω ενδιαφερόντων και ανησυχιών στη φιλοσοφία της γλώσσας.[26] Η διαμάχη εμφανίζει κάποιες ομοιότητες και αναλογίες προς την παλαιά μεσαιωνική διαμάχη μεταξύ ρεαλισμού, κονσεπτιουαλισμού και νομιναλισμού. Στη νεότερη όμως εκδοχή της υπεισέρχονται και συνεισφέρουν με ένα εντελώς καινούργιο τρόπο οι παράγοντες της γλώσσας και του νοήματος των προτάσεων. Ειδικά, η παρέμβαση του νοηματοθεωρητικού παράγοντα δρα καταλυτικά στη σύγκρουση μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών όπως θα δούμε αμέσως.

Τα κλασικά μαθηματικά ως φιλοσοφική άποψη χαρακτηρίζονται από μια ρεαλιστική σημασιολογία, η οποία, τελικά, έρχεται σε αντίθεση με στοιχειώδεις απαιτήσεις της θεωρίας του νοήματος. Στα κλασικά μαθηματικά, όπως ήδη αναφέρθηκε, έχουμε στη διάθεσή μας μια έννοια της αλήθειας, σύμφωνα με την οποία οι προτάσεις —ανεξάρτητα από τη γνώση μας και προκαταβολικά— θεωρούνται αληθείς ή ψευδείς. Επιπλέον, οι προτάσεις προσδιορίζονται ως αληθείς —αν είναι αληθείς— σύμφωνα με την εσωτερική τους σύσταση και δομή. Η τιμή αλήθειας μιας πρότασης προσδιορίζεται ως συνάρτηση των επιμέρους τιμών αλήθειας των προτάσεων που τη συγκροτούν. Μια πρότασηλ.χ. της μορφής

(1) $A \vee B$

είναι αληθής ανάλογα με τις τιμές αλήθειας των προτάσεων A και B. Ειδικά η πρόταση

(2) $A \vee \neg A$

είναι πάντοτε αληθής (η αρχή του αποκλειομένου τρίτου): δεν είναι ανάγκη να γνωρίζουμε την τιμή αλήθειας της A για να βεβαιώσουμε ότι η (2) είναι αληθής. Μια τέτοια, αθώα θα νόμιζε κανείς, πρακτική χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα κλασικά μαθηματικά, όπως λ.χ. για να ορίσουμε την παρακάτω μαθηματική οντότητα:

$$(3) \quad \alpha = \begin{cases} 1, \text{αν η Εικασία του Goldbach είναι αληθής} \\ 0, \text{ειδαλλοιώς.} \end{cases}$$

(Εικασία του Goldbach: κάθε άρτιος αριθμός —εκτός του δύο— γράφεται ως άθροισμα δύο πρώτων φυσικών αριθμών).

Μολονότι δεν γνωρίζουμε αν η εικασία του Goldbach είναι αληθής, ωστόσο θεωρούμε ότι η ανωτέρω μαθηματική οντότητα (που ορίσαμε μέσω της (3)) είναι καλώς ορισμένη. Η άποψη αυτή στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά είναι παράλογη: δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε την (1) χωρίς να έχουμε εξασφαλίσει προηγουμένως την τιμή αλήθειας των προτάσεων A και B· συνεπώς, δεν μπορούμε να βεβαιώσουμε γενικά τη (2). Οπότε η σχέση (3) δεν ορίζει καμιά μαθηματική οντότητα![27]

Το πρόβλημα που εμφανίζεται στα κλασικά μαθηματικά συνδέεται με τη ρεαλιστική θεωρία του νοήματος που προσαρτάται σ' αυτά. Η βασική θέση της ρεαλιστικής θεωρίας του νοήματος είναι ότι για την κατανόηση των προτάσεων μπορούμε να στηριζόμαστε στη γνώση των συνθηκών αλήθειας των προτάσεων. Διότι είναι εύλογο να συνδέσουμε με κάθε πρόταση συνθήκες αλήθειας· έτσι, το νόημα της πρότασης «ο αριθμός 5 είναι πρώτος» συνδέεται με τις συνθήκες αλήθειας της πρότασης, το γεγονός ότι ο αριθμός 5 είναι πράγματι πρώτος.[28] Στο βαθμό που περιοριζόμαστε σε προτάσεις των οποίων γνωρίζουμε ήδη την τιμή αλήθειας δεν υπάρχει πρόβλημα, γιατί τότε μπορούμε να επιδείξουμε, αν μας ζητηθεί, ότι πραγματικά γνωρίζουμε τις συνθήκες αλήθειας της πρότασης. Αν όμως αναφερθούμε στην εικασία του Goldbach, ή οποιαδήποτε άλλη πρόταση της οποίας δεν γνωρίζουμε την τιμή αλήθειας, αντιμετωπίζουμε το εξής παράδοξο. Από τη μια μεριά, κατανοούμε την πρόταση — όπως φαίνεται από το γεγονός ότι γνωρίζουμε να τη χρησιμοποιούμε καταλλήλως. Αν όμως το γεγονός ότι κατανοούμε μια πρόταση σημαίνει ότι συλλαμβάνουμε τις συνθήκες αλήθειας της πρότασης, τότε πραγματικά δεν μπορούμε να επιδείξουμε το γεγονός ότι πράγματι συλλαμβάνουμε τις συνθήκες αλήθειας της πρότασης.

Η δυσκολία στην οποία περιέρχεται η ρεαλιστική σημασιολογία των μαθηματικών, προκύπτει από τη σύγκρουσή της με το δόγμα ότι το νόημα των προτάσεων εκδηλώνεται αποκλειστικά και εξαντλητικά στη χρήση των προτάσεων. Ο διυποκειμενικός χαρακτήρας του νοήματος απαιτεί να αποδώσουμε σε έναν ομιλητή κατανόηση μιας πρότασης στο βαθμό που αυτός έχει την ικανότητα να επιδείξει τη σχετική γνώση σε πλαίσια πρακτικής και χρήσης της πρότασης. Για αυτό ακριβώς δημιουργείται πρόβλημα για τα κλασικά μαθηματικά: η ικανότητά μας να κατανοούμε τη γλώσσα (εν προκειμένω, ένα τμήμα της) δεν μπορεί να κριθεί με βάση συνθήκες αλήθειας που μας είναι άγνωστες εν γένει. Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά όμως το πρόβλημα αυτό δεν εμφανίζεται, γιατί οι προτάσεις δεν θεωρούνται αληθείς ανεξάρτητα από την ικανότητά μας να τις αποδείξουμε αληθείς. Αυτό δεν σημαίνει ότι για να πούμε ότι κατανοούμε τις προτάσεις απαιτείται να μπορούμε να τις αποδεικνύουμε. Το μόνο που απαιτείται είναι η ικανότητά μας να αναγνωρίζουμε — όταν μας δείξουν μια πρόταση/κατασκευή — ότι αυτή αποδεικνύει την αρχική πρόταση. Στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά βεβαιώνουμε μια πρόταση ως αληθή μόνο στο βαθμό που έχουμε στη διάθεσή μας μια απόδειξη/κατασκευή. Οι προτάσεις συνεπώς, δεν είναι αληθείς ανεξάρτητα από τις δυνατότητές μας να τις αναγνωρίσουμε ως αληθείς. Συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι γενικά η αρχή του αποκλειομένου τρίτου δεν ισχύει στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά.[29]

Κλείνοντας θα περιοριστώ σε δύο παρατηρήσεις αναφορικά με την ερμηνεία Dummett. Η πρώτη αφορά τη γενική διαπίστωση ότι στην παραπάνω ερμηνεία ο Dummett δεν ενδιαφέρεται να ερμηνεύσει το πνεύμα του ιντουισιονισμού όπως διατυπώθηκε ιστορικά από τον Brouwer και άλλους. Πρόκειται κυρίως για μια ερμηνεία που βρίσκεται σε συμφωνία με τις απόψεις του ύστερου Wittgenstein των Φιλοσοφικών Ερευνών. Έτσι, παραμένει ανοιχτό το ερώτημα της σημασιολογικής ερμηνείας του ιντουισιονισμού του Brouwer.[30] Η δεύτερη παρατήρηση αφορά την παρότρυνση του Dummett ότι η διαμάχη μεταξύ κλασικών και ιντουισιονιστικών μαθηματικών θα μπορούσε να κριθεί υπέρ του ενός ή του άλλου από τους δύο αντιπάλους. Με βάση τη θεωρία του νοήματος και τη σημασιολογική θεωρία, η έκβαση της διαμάχης κρίνεται υπέρ του ιντουισιονισμού (του Dummett). Σε άλλη ευκαιρία έχω ήδη διατυπώσει την άποψη ότι αυτό που ενδιαφέρει μια φιλοσοφία των μαθηματικών δεν μπορεί να είναι ο εξοστρακισμός μιας τόσο γόνιμης πρακτικής —ως ιστορικής και κοινωνικής πρακτικής— όπως είναι τα κλασικά μαθηματικά.[31] Και αντιστρόφως, στα πλαίσια της μαθηματικής πρακτικής, δεν μπορούμε να αποκλείσουμε την ανάπτυξη διαφόρων ειδών κατασκευαστικών μαθηματικών (από τα οποία ο ιστορικός ιντουισιονισμός του Brouwer αποτελεί μια ισχυρή παραλλαγή).[32] Αν η μαθηματική πρακτική νοηθεί με αρκετά ευρύ τρόπο —όπως άλλωστε απαιτείται— τότε αυτό μας επιτρέπει να αναπτύξουμε τόσο κλασικά όσο και ιντουισιονιστικά μαθηματικά (γενικότερα, κατασκευαστικά). Οι εξιδανικεύσεις που υπεισέρχονται στα κλασικά μαθηματικά είναι διαφορετικές από αυτές που υπεισέρχονται στα ιντουισιονιστικά μαθηματικά. Πάντως, δεν μπορούμε να πούμε ότι το ένα είδος εξιδανικεύσεων είναι ορθό ενώ το άλλο εσφαλμένο. Μάλλον πρόκειται για διαφορετικά είδη, τα οποία μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ανάλογα με το είδος των προβλημάτων που μελετάμε στα μαθηματικά και σε άλλες περιοχές της γνώσης.

Η κατεύθυνση της ερμηνείας του ιντουισιονισμού από τον Dummett αποτελεί τυπική περίπτωση μετάθεσης χαρακτηριστικών φιλοσοφικών προβλημάτων από μια περιοχή στην άλλη. Εν προκειμένω, η φτμ χρησιμοποιείται ως μέσο για να επιλύσει προβλήματα που συνδέονται με την περιοχή της φιλοσοφίας της γλώσσας. Έτσι κινδυνεύει να χάσει επαφή με προβλήματα που αφορούν κυρίως την περιοχή των μαθηματικών και τη μαθηματική πρακτική. Βέβαια, ένας καινούργιος κλάδος, όπως η φτμ, χαρακτηρίζεται από αυτονόμηση των προβλημάτων και στοιχειοθέτηση νέων. Δεν θα έπρεπε όμως να χαθεί η ισορροπία μεταξύ μαθηματικής πρακτικής και φιλοσοφίας των μαθηματικών.

Στην εισαγωγή αυτή έθιξα ορισμένες μόνο κατευθύνσεις της φτμ· θα μπορούσε να αναφερθεί κανείς και σε άλλες[33], αλλά νομίζω ότι αυτές που έθιξα αποτελούν ενδεικτικές κατευθύνσεις της προβληματικής της φτμ τα τελευταία χρόνια. Παρατήρησα ήδη από την αρχή ότι η τάση που χαρακτηρίζει την εξέλιξη της φτμ από τα χρόνια του Frege και εφεξής είναι η διαρκής απομάκρυνσή της από τη μαθηματική πρακτική, τα συγκεκριμένα προβλήματα της πρακτικής αυτής — όπως λ.χ. το πλαίσιο ανακάλυψης νέων μαθηματικών μεθόδων και η μελέτη χαρακτηριστικών εννοιών των μαθηματικών (ορισμός, απόδειξη κλπ.). Η κατεύθυνση που συνδυάζει το συγκεκριμένο ιστορικό πλαίσιο με τις μαθηματικές ιδέες που αναπτύσσονται σ' αυτό αποτέλεσε μέρος των φιλοσοφικών αναζητήσεων του Lakatős.[34] Η ανάγκη για μελέτες αυτού του είδους παραμένει, μολονότι πρόσφατα εμφανίστηκαν σχετικά δείγματα.[35]

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. S. Kripke "Is there a problem about substitutional quantification?" στο Truth and Meaning, (eds) G. Evans and J. McDowell, Oxford 1976, σ. 416.
2. Βλ. G. Temple, 100 Years of Mathematics, Duckworth, London 1981; σ. 1.
3. Πρβλε Δ. Αναπολιτάνου, Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών (ΕΦΜ), Νεφέλη, Αθήνα 1985, αναφορικά με τις σχολές των μαθηματικών και τις βιβλιογραφικές αναφορές στους πρωτεργάτες αυτών των κινήσεων (σσ. 217-301). Για μερικά αυθεντικά κείμενα των εκφραστών των σχολών βλ. Π. Χριστοδουλίδη (επ), Η Φιλοσοφία των Μαθηματικών, I,II (ΦΜ), Εγνατία, Θεσσαλονίκη 1980, 1981. Επιπλέον, πρβλε την ανθολογία των P. Benaceraff and H. Putnam, Philosophy of Mathematics, Cambridge 1983. Ειδικά για τον Frege βλ. Τα Θεμέλια της Αριθμητικής (ΘΑ), υπό έκδοση, Νεφέλη, Αθήνα 1987, μετ. και εισαγωγή Γ. Ρουσόπουλου.
4. Δ. Αναπολιτάνου, ΕΦΜ, σσ. 11-162.
5. G. Frege, Begriffsschrift, Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens, 1879 (Εννοιογραφία, μια γλώσσα της καθαρής σκέψης κατά το πρότυπο της αριθμητικής). Αγγλική μετ. T. Bynum, Oxford 1972.
6. K. Goedel "Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I", στο Monatshefte für Mathematik und Physik, vol. 38 (1931), σσ. 346-60.

7. Βλ. ενδεικτικά M. Dummett "Realism", Sythese 52 (1982), P. Horwicz "Three Forms of Realism", Synthese 51 (1982) και H. Putman "What is mathematical truth?" στο Philosophical Papers, vol. I, Cambridge UP, Cambridge, 1975 (WIMT).
8. Βλ. P. Bernays "On Platonism" (1935) στο P. Benaceraff and H. Putnam, op. cit. Ο όρος δεν πρέπει να συγχέεται με τη φιλοσοφία του Πλάτωνος.
9. Βλ. K. Goedel "What is Cantor's continuum problem?", στο op. cit. και στο Π. Χριστοδουλίδη, ΦΜ.
10. W.V.O. Quine, Philosophy of Logic, Prentice-Hall, New York 1970, (PL), σ. 100.
11. H. Putnam, WIMT, σ. 74 και του ίδιου, Philosophy of Logic, London 1972, σσ. 54-74.
12. Quine, PL, σ. 101.
13. J.S. Mill, A system of Logic (1843) και M. Resnik, Frege and the Philosophy of Mathematics, Cornell UP, Ithaca, 1980.
14. Πρβλε Frege, ΘΑ και Εισαγωγή του επιμελητή.
15. Quine "Two Dogmas of Empiricism" στο From a logical point of view, Cambridge 1953.
16. Οι αγγλικοί όροι είναι Fallible και Corrigible και αποτελούν χαρακτηρισμούς της εμπειρικής γνώσης σε αντίθεση με τον απόλυτο και αναγκαίο χαρακτήρα της a priori γνώσης. Πρβλε S. Kripke, Naming and Necessity, Cambridge, 1980.
17. Εκπρόσωποι αυτού του ρεύματος μπορούν να θεωρηθούν οι εξής: H. Putnam, WIMT, M. Resnik "Mathematics as a science of patterns: Epistemology" (MPSE), στο NOÛS XVI (1982), σσ. 95-102, P. Kitcher, The Nature of Mathematical Knowledge (NMK), Oxford, 1983 και P. Maddy "Perception and the Mathematical Intuition", Philosophical Review 89 (1980).
18. Resnik, MSPE, σ. 96.
19. Kitcher, NMK, σ. 224.
20. Για μια παρουσίαση και κριτική του προγράμματος βλ. Γ. Ρουσόπουλου «Μαθηματική γνώση και εμπειριστική επιστημολογία», Φιλοσοφία 17 (1987) και του ίδιου "Does mathematics describe the world?".
21. N. Goodman and W.V. Quine "Steps toward a constructive Nominalism", Journal of Symbolic Logic 12 (1947).
22. H. Field, Science without numbers, Princeton UP, 1980.
23. D. Hilbert, The Foundations of Geometry (1899), αγγλική μετ. Open Court, La Salle, 1971.
24. Πρβλε κριτική του M. Resnik "How nominalist is Hartry Field's nominalism?", Philosophical Studies 47 (1985), σσ. 163-81.
25. Βλ. Γ. Ρουσόπουλου, Η Κριτική των κλασικών Μαθηματικών από τον Brouwer και τη σχολή του Ιντουισιονισμού, Διδ. Διατριβή, Ιωάννινα, 1987 (Η Κριτική), σσ. 126-45.
26. Πρβλε Γ. Ρουσόπουλου «Η ρεαλιστική θεωρία του νοήματος» (ΡΘΝ), Ελληνική Φιλοσοφική Επιθεώρηση 3, 1986.
27. Οι δυσκολίες της κλασικής σημασιολογίας είναι φανερές όταν εξετάσουμε παραδείγματα με υπαρκτικό ποσοδείκτη και το κατηγόρημα διατρέχει ένα άπειρο πλήθος στοιχείων. Τέτοια παραδείγματα αφθονούν στη στοιχειώδη θεωρία των αριθμών. Στα πλαίσια των κλασικών μαθηματικών είναι καθόλα αποδεκτό να ισχυριστούμε ότι «(v) A(v)», όπου v φυσικός αριθμός. Τότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι «($\exists$v) $\neg$A(v)», χωρίς φυσικά να έχουμε στη διάθεσή μας κάποια μέθοδο ή αλγόριθμο που υπολογίζει τον αριθμό v. Πρβλε Γ. Ρουσόπουλου, Η Κριτική, Κεφ. 6.
28. Βλ. M. Dummett, The elements of Intuitionism, Oxford Logic Series, Oxford, 1977, σσ. 360-451 και Π. Χριστοδουλίδη, ΦΜ (το ίδιο κείμενο). Επιπλέον, το ζήτημα πραγματεύεται διεξοδικά και ο Γ. Ρουσόπουλος, Η Κριτική, Κεφ. 8. Ο Dummett θεωρεί ότι η αρχή αυτή προέρχεται ουσιαστικά από τη φιλοσοφία του Frege και τη συναντάμε ρητά διατυπωμένη στο Tractatus του Wittgenstein. Μια εναλλακτική προσέγγιση προέρχεται μέσω της σημασιολογικής θεωρίας της αλήθειας κατά Tarski (Βλ. D. Davidson "Truth and Meaning", Synthese 17 (1967) και ελλ. μετάφραση ΔΕΥΚΑΛΙΩΝ 27/28 (1979). Επιπλέον Π. Τσελεμάνη «Η Μέθοδος της Αλήθειας στη μεταφυσική: το πρόγραμμα Davidson», Η Φιλοσοφία Σήμερα, ΕΦΕ, Αθήνα 1985, σσ. 155-72.
29. Πρβλε M. Dummett "What is the philosophical basis of intuitionistic logic", στο Truth and other enigmas, Duckworth, London 1978. Επιπλέον, Γ. Ρουσόπουλου, Η Κριτική, Κεφ. 8 και του ίδιου, ΡΘΝ.
30. Πρβλε Γ. Ρουσόπουλου, Η Κριτική, Κεφ. 9 και G. Sundholm "Constructions, Proofs and the Meaning of the Logical Constants", Journal of Phil. Logic 12 (1983), σσ. 153-72.
31. Βλ. G. Roussopoulos "Does mathematics describe the world?".
32. Πρβλε M. Beeson, Foundations of Constructive Mathematics, Springer-Verlag, Berlin 1985 και F. Richman and D. Bridges, Varieties of Constructive Mathematics (1987, υπό έκδοση), όπου παρουσιάζονται τρεις παραλλαγές κατασκευαστικών μαθηματικών. Από αυτές, η ασθενέστερη αντιστοιχεί στο πρόγραμμα του E. Bishop, η δεύτερη στο πρόγραμμα του A. Markov και η τρίτη είναι ο (κλασικός) ιντουισιονισμός του Brouwer.
33. Λ.χ. M. Jubien "Intensional Foundations of Mathematics", Noûs XV (1981), σσ. 513-27. Του ίδιου, "Ontology and Mathematical Truth", Noûs XI (1977), σσ. 133-50. G. Kessler "Mathematics and Modality", Noûs XII (1978), σσ. 421-41. C. Parsons, Philosophy in Mathematics, Cornell UP, Ithaca, 1985. M. Steiner "Mathemati-

cal Explanation", Phil. Studies 34 (1978), σσ. 134-51. W. Tait "Finitism", Journal of Philosophy 78 (1981), σσ. 524-46.

34. I. Lakatos, Proofs and Refutations, Cambridge UP, Cambridge 1976.
35. M. Hallett "Towards a theory of mathematical research programms" (I, II), Brit. Jour. Phil. Science 30 (1979), σσ. 1-25 και 135-59. Του ίδιου, Cantorian Set Theory and Size Limitation, Clarendon, Oxford, 1984. Επιπλέον, πρβλε Κεφ. 10 του P. Kitcher, NMK και του ίδιου, "Frege, Dedekind and the Philosophy of Mathematics", στο συλλογικό τόμο, Frege Synthesized, (eds) L. Haaparanta and J. Hintikka, Reidel 1986.

ΔΡ ΓΙΩΡΓΟΣ ΡΟΥΣΟΠΟΥΛΟΣ
ΑΘΗΝΑ