

ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΦΟΡΜΑΛΙΣΜΟΣ

ΛΑΜΠΡΟΥ ΝΤΟΚΑ

Ένα βαθύ πρόβλημα, που αναφέρεται στη φύση της ανθρώπινης νόησης, είναι η αμφισβήτηση ύπαρξης σκέψης, ανεξάρτητης από κάθε σύστημα συμβόλων. Πολλοί υποστηρίζουν ότι δεν είναι δυνατόν να έχουμε κάποια μορφή σκέψης, χωρίς την σύγχρονη παρουσία συστήματος συμβόλων, δηλαδή όταν σκεπτόμαστε χρησιμοποιούμε πάντοτε σύμβολα, τα οποία μπορεί να είναι: ήχοι, σχήματα, οπτικοί ερεθισμοί και ό,τι δήποτε άλλο, που συγκεκριμενοποιείται στη συνειδησή μας. Μια σκέψη γεννιέται μαζί με το συμβολισμό της και δεν υπάρχει χωρίς αυτόν.

Υποστηρίζεται και η αντίθετη άποψη, που ξεχωρίζει τη σκέψη από το συμβολισμό. Μαθηματικοί μεγάλου κύρους πιστεύουν, ότι πολλές φορές η σύλληψη νέων εννοιών είναι ανεξάρτητη από κάθε συμβολισμό που εμφανίζεται και μορφοποιείται για την πληρέστερη έκφραση της σκέψης. Το πρόβλημα του συμβολισμού και της σκέψης είναι πολύπλοκο και παρά τις μελέτες των επιστημόνων και φιλοσόφων δεν έχει δοθεί ικανοποιητική λύση. Ανεξάρτητα από την καταφατική ή αρνητική απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα, δεν είναι αυθαίρετο να δεχθούμε, πως η έκφραση και γενικότερα η λειτουργία της ανθρώπινης σκέψης συνυπάρχουν και συμβαδίζουν με κάποια μορφή συμβολισμού. Το ενδιαφέρον που έχει η απάντηση στο προηγούμενο πρόβλημα είναι μεγάλο, τόσο από επιστημονική άποψη όσο και από φιλοσοφική θεώρηση.

Για την παρούσα μελέτη εκείνο που απαιτείται είναι η κοινή παραδοχή της συνύπαρξης συστήματος συμβόλων και ανθρώπινης νόησης, χωρίς να μας ενδιαφέρει η ουσιαστική ταύτιση του συμβολισμού και της σκέψης. Είναι απαραίτητο, και επιβάλλεται εκ των πραγμάτων, να υποθέσουμε πως το ξεκίνημα της νόησης είναι μια διαίσθηση, που εκδηλώνεται μέσα σένα σύστημα συμβόλων. Η κλασική άποψη για τη θεώρηση του κόσμου είναι η παραδοχή μιας κοινής αίσθησης των πραγμάτων καθώς και το κύρος αυτής, χωρίς να το προσδιορίζουμε. Έτσι φτιάχνουμε ένα σύμπαν, το οποίον αποτελείται από διακεκριμένα πράγματα, που μπορούμε να τα αντιλαμβανόμαστε συγχρόνως και καθένα ξεχωριστά. Συνεπώς έχουμε ένα είδος εμπειρίας, που μας παρέχει τόσο την απόδειξη της ύπαρξης κάθε πεπερασμένης πολλαπλότητας, όσο και την εγκυρότητά της. Η διαίσθηση της πολλαπλότητας είναι πρωταρχική για την διαμόρφωση μιας εμπειρίας, ενός κοσμοειδώλου, το οποίον θεωρούμε σαν συνύπαρξη διαφορετικών πολλαπλοτήτων, ξεχωριστών αντικειμένων. Δεν είναι σχήμα λόγου, αν παρατηρήσουμε, πως το προηγούμενο είδος εμπειρίας εκφράζει ένα ελάχιστο μέρος της αίσθησής μας, που κατακλύζεται από ένα πλέγμα ερμηνειών και παρανοήσεων, γιατί κυριαρχεί μια πλήρης σύγχυση ακαθορίστων εννοιών. Πράγματι αυτή η θεώρηση ταυτίζει μια εξωτερική οντότητα με την εντύπωση που προκαλεί σε μία συνείδηση. Το γεγονός αυτό εκφράζεται στη κλασική φιλοσοφία σαν ταύτιση του όντος με την εικόνα του. Παρόλο που για τις εξωτερικές οντότητες μπορούμε να δεχθούμε πως υπάρχουν και κάθε μια διακρίνεται από τις άλλες, οι εντυπώσεις όμως που προκαλούν σε μια συνείδηση έχουν χαρα-

κτήρα στιγμιαίο (δηλαδή του παρόντος) και εξαρτώνται από τις δυνατότητες μιας συγκεκριμένης συνείδησης.

Πολλοί ανθρωπολόγοι και κοινωνιολόγοι ισχυρίζονται ότι υπάρχουν συνειδήσεις, που βλέπουν τον κόσμο κατά αντίστροφο τρόπο, δηλαδή από το όλο προς το μέρος. Η θεώρηση των πραγμάτων δεν είναι η παρουσία μιας πολλαπλότητάς τους, αλλά μια ενότητα συγκριτική των εξωτερικών χαρακτηριστικών τους, με μόνη βεβαιότητα την στιγμιαία εντύπωση που δημιουργείται στον εκάστοτε φορέα μιας συνείδησης. Όταν ο φορέας μιας συνείδησης έχει την αίσθηση του εκτός αυτού κόσμου, και του διαχωρισμού του από τα φαινόμενα, τα οποία μπορούν να είναι και ψευδαισθήσεις, τότε αυτή η συναίσθηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας επιπλέον απαραίτητος συντελεστής για την παρουσία της συγκεκριμένης συνείδησης.

Η ουσιαστικοποίηση ορισμένων χαρακτήρων της συνείδησης και η ξεχωριστή συνύπαρξή τους συνθέτουν την διαίσθηση της πολλαπλότητας. Στην πραγματικότητα η εμπειρία που μπορούμε να έχουμε δεν είναι ούτε αρκετή ούτε κατάλληλη για την επιβεβαίωση της διαίσθησης μιας πολλαπλότητας. Συμβαίνει έτσι ώστε αυτός που διαθέτει συνείδηση να έχει την αίσθηση μιας συγκεκριμένης πολλαπλότητας, γιατί κατέχεται από τό συναίσθημα του διαχωρισμού του από τον εξωτερικό κόσμο και επιπλέον πιστεύει στην διακριτική του ικανότητα, δηλαδή είναι βέβαιος πως είναι έφοδιασμένος με την απαιτούμενη διαίσθηση για τον καθορισμό της πολλαπλότητας. Η εμπειρία δεν μπορεί να ληφθεί σαν απόλυτη επαλήθευση της διαίσθησης που έχουμε για την πεπερασμένη πολλαπλότητα. Αν όμως δεχθούμε την εγκυρότητα της διαίσθησης, τότε η εμπειρία μπορεί να προσφέρει σίγουρη αναγνώριση των πολλαπλοτήτων. Ομοίως η εμπειρία με κανένα τρόπο δεν βεβαιώνει πως η πολλαπλότητα, που γεννιέται από μια διαίσθηση, είναι ψευδής.

Συνεπώς, αν δεχθούμε ότι η αντίληψη που έχουμε για το σύμπαν είναι κατά κάποιο τρόπο έγκυρη, τότε προϋποθέτουμε την ίδια εγκυρότητα για τη διαίσθηση των πεπερασμένων πολλαπλοτήτων ή οποιωνδήποτε άλλων. Οι θεωρίες που αναφέρονται στον εξωτερικό κόσμο δεν μπορούν να επαληθεύσουν την διαίσθηση των πολλαπλοτήτων για δύο λόγους:

α) Είναι έμμεσες σε σχέση με την απλοϊκή άμεση εμπειρία και β) είναι προϊόντα μελέτης, που στα διάφορα στάδια της θεωρητικής διεργασίας προϋποθέτουν την εγκυρότητα της διαίσθησης.

Ένας φορέας συνείδησης έχει την ψευδαισθηση ή ακόμα πιστεύει, πως διαθέτει κάποια έγκυρη διαίσθηση πολλαπλότητας, η οποία μπορεί να είναι ξεκάθαρη, φωτισμένη και να ταυτίζεται με αυτή που έχουν πολλοί άλλοι φορείς συνείδησης. Τίποτε όμως δεν μας εγγυάται το απόλυτο κύρος μιας πολλαπλότητας αυτού του είδους.

Μπορούμε να πιστεύουμε ή και να μην πιστεύσουμε στην ύπαρξή της. Ακόμα και ο κοινός άνθρωπος έχει διαίσθηση μιας μη πεπερασμένης πολλαπλότητας. Π.χ. όλοι διαισθανόμαστε την πολλαπλότητα των ακεραίων αριθμών, η οποία δεν ταυτίζεται με καμμία πεπερασμένη. Η εγκυρότητα της πεπερασμένης πολλαπλότητας δεν είναι περισσότερο ή λιγότερο ισχυρή από οποιασδήποτε άλλης άπειρης πολλαπλότητας.

Για να είναι δυνατή η θεώρηση κάποιου συστήματος συμβόλων, το οποίον είναι απαραίτητο για την εκδίπλωση της ανθρώπινης νόησης και τη διαμόρφωση οιασδήποτε γλώσσας, πρέπει να δεχθούμε την ύπαρξη κοινής διαισθητικής αντίληψης πολλαπλοτήτων, χωρίς να απαιτούμε και την εγκυρότητά της. Ένα σύστημα συμβόλων, προικισμένο με κανόνες σύνθεσης συμπλεγμάτων συμβόλων, επιτρέπει τη διαμόρφωση μιας γλώσσας, της οποίας ο ορισμός δεν είναι καθόλου εύκολος. Αν περιορίσουμε τις φιλοδοξίες μας στη μελέτη μιας κατηγορίας γλωσσών, δηλαδή τον φορμαλισμό, τότε μπορούμε να περιγράψουμε ένα μεγάλο μέρος της πνευματικής μας δραστηριότητας. Συγκεκριμένα γίνεται δυνατή η περιγραφή της κλασσικής λογικής καθώς και η θεώρηση άλλων λογικών, οι οποίες είναι αναγκαίες για την πραγματοποίηση πολυπλόκων λογισμών, απαραίτητων στη σύγχρονη επιστημονική τεχνική. Κάθε φορμαλισμός είναι μία γλώσσα, όπως ο έναρθρος λόγος, όχι όμως και το αντίστροφο, παρόλο που ένα μέρος του ενάρθρου λόγου μπορεί να δοθεί μέσα από ένα φορμαλισμό.

* *

Προτού προχωρήσουμε σε οποιαδήποτε σκέψη, που αναφέρεται στη περιγραφή και λειτουργία της νόησης, είναι απαραίτητο να εκθέσουμε με σύντομο και απλό τρόπο το τι είναι φορμαλισμός.

Στο φορμαλισμό, αν και δεν έχουμε το δικαίωμα να δεχθούμε διαισθητικά στοιχεία, είμαστε υποχρεωμένοι από τα ίδια τα πράγματα να κάνουμε χρήση μιας προφορμαλιστικής διαίσθησης. Αν δεν προϋποθέσουμε την ύπαρξη και την «εγκυρότητα» αυτής της διαίσθησης, είναι αδύνατον να προχωρήσουμε σε κάποιο είδος μελέτης της νόησης, και ειδικότερα στο φορμαλισμό. Με αυτή την παραδοχή θεωρούμε ότι έχουμε την δυνατότητα να διακρίνουμε ή να αντιληφθούμε μία κατηγορία συμβόλων, δηλαδή έχουμε τον διαισθητικό καθορισμό του συμβόλου και της πολλαπλότητας ή των πολλαπλοτήτων. Π.χ. πεπερασμένο πλήθος συμβόλων, αριθμήσιμα σύνολα συμβόλων, σύνολα με ισχύ του συνεχούς κ.τ.λ. Στον κλασσικό ορισμό του φορμαλισμού η πολλαπλότητα που θεωρούμε είναι υποχρεωτικά πεπερασμένη. Έτσι κατ' αρχήν έχουμε μία κατηγορία συμβόλων που τα θεωρούμε σαν αλφάβητο Α, Β, Γ, κ.τ.λ. και τη διαίσθηση της πεπερασμένης πολλαπλότητας. Από το αλφάβητο, με δοσμένους κανόνες κατασκευής σχηματίζουμε, με ένα πεπερασμένο πλήθος γραμμάτων, λέξεις, που καλούνται τύποι. Οι τύποι εκ των προτέρων δεν έχουν καμιά σημασία, δηλαδή δεν εκφράζουν έννοιες, αλλά είναι πεπερασμένες πολλαπλότητες, που κατασκευάζονται σύμφωνα με δοσμένους κανόνες, οι οποίοι επιβάλλουν στην πολλαπλότητα ορισμένη δομή. Αν θεωρήσουμε μία πεπερασμένη πολλαπλότητα συμβόλων με δομή, η οποία δεν έγινε σύμφωνα με τους κανόνες κατασκευής, τότε αυτή η πολλαπλότητα δεν είναι τύπος. Ακολούθως θεωρούμε α) μία συλλογή τιμών κάποιας πολλαπλότητας, εκ των οποίων μια τιμή καλείται «αλήθεια» β) μια κατηγορία τύπων, στους οποίους αντιστοιχούμε την τιμή «αλήθεια»· την κατηγορία αυτή καλούμε σύστημα αξιωμάτων· κάθε τύπος του συστήματος αξιωμάτων καλείται αξίωμα, και γ) τους συμπερασματικούς κανόνες, οι οποίοι είναι κατασκευαστικοί, δηλαδή ξεκινώντας από αρχικούς τύπους, και με εφαρμογή των συμπερασματικών κανόνων σ' αυτούς, κατασκευάζουμε ένα καινούργιο τύπο. Οι συμπερασματικοί κανόνες πληρούν την ιδιότητα: Αν ένας τύπος Τ προκύπτει από

την εφαρμογή συμπερασματικών κανόνων σε αρχικούς τύπους, στους οποίους αντιστοιχεί η τιμή «αλήθεια», τότε υποχρεωτικά στο τύπο T αντιστοιχεί η τιμή «αλήθεια».

Λέμε λοιπόν ότι έχουμε ένα φορμαλισμό, όταν μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχουν τα παρακάτω:

- 1) Ένα σύστημα συμβόλων και πεπερασμένες πολλαπλότητες των συμβόλων.
- 2) Κανόνες κατασκευής τύπων εκ των συμβόλων του συστήματος.
- 3) Συλλογή τιμών.
- 4) Αξιωματικό σύστημα.
- 5) Συμπερασματικοί κανόνες.

Για την καλύτερη κατανόηση του φορμαλισμού και την επιβεβαίωση της προφοράς του είναι φυσικά απαραίτητο να δοθούν παραδείγματα φορμαλισμού: Ένα αναμφισβήτητο παράδειγμα φορμαλισμού είναι ή άλγεβρα των προτάσεων ή λογισμός των προτάσεων ή λογική των προτάσεων¹, της οποίας τα κύρια στοιχεία θα εκτεθούν στη σημείωση (1) του παρόντος άρθρου.

Η παράθεση των βασικών εννοιών και ορισμών του λογισμού των προτάσεων αρκεί για να καταστήσει συγκεκριμένη την έννοια του φορμαλισμού στη Λογική. Επειδή σκοπός μας είναι να δώσουμε κάτι περισσότερο και βαθύτερο από την ιδέα της φορμαλιστικής έκφρασης της λογικής των προτάσεων είναι απαραίτητο να κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

I) Για να πάρουμε μια γεύση από την ουσία της τυπικής λογικής, είναι αναγκαίο να γίνει φανερή η μαθηματική δομή του λογικού οργάνου, δηλαδή να δοθεί η αλγεβρική διατύπωση των θεμελιωδών αρχών της κλασσικής λογικής, που εφαρμόζονται διαισθητικά. Η μαθηματικοποίηση της κλασσικής λογικής γίνεται αισθητή από την παρακάτω τυπική έκφραση μερικών αρχών της λογικής του Αριστοτέλη:

1) *Αρχή της απλοποίησης*: $A \wedge B \rightarrow A$, δηλαδή, αν δύο προτάσεις είναι συγχρόνως αληθινές, τότε και κάθε μια ξεχωριστά είναι αληθινή.

2) *Αρχή της σύνθεσης*: $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge \Gamma)$, δηλαδή, αν η πρόταση A συνεπάγεται την B και συγχρόνως η A συνεπάγεται την Γ , τότε η A συνεπάγεται τις B και Γ συγχρόνως.

3) *Αρχή του συλλογισμού*: $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma)$, δηλαδή αν η A συνεπάγεται την B και συγχρόνως η B συνεπάγεται την Γ , τότε η A συνεπάγεται την Γ .

4) *Αρχή του συμπεράσματος*: $A \wedge (A \rightarrow B) \rightarrow B$, δηλαδή αν η A είναι αληθινή και συγχρόνως συνεπάγεται την B , τότε η B είναι αληθινή.

5) *Αρχή της αντίφασης*: Ο τύπος $A \wedge \neg A$ έχει την τιμή «ψέμα», δηλαδή μια πρόταση δεν μπορεί να έχει συγχρόνως την ίδια τιμή με την άρνησή της.

6) *Αρχή της του τρίτου αποκλίσεως*: Ο τύπος $A \vee \neg A$ έχει την τιμή «αλήθεια», δηλαδή μιά από τις προτάσεις A , $\neg A$ έχει πάντοτε την τιμή «αλήθεια».

7) *Αρχή της αντίθεσης*: $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$, δηλαδή αν η A συνεπάγεται την B , τότε η άρνηση $\neg B$ της B συνεπάγεται την άρνηση $\neg A$ της A .

II) Η σύγχρονη τυπική ή μαθηματική λογική με την φορμαλιστική της μορφή είναι απαραίτητη αλλά και η φυσική διεύρυνση της λογικής του Αριστοτέλη.

Προ του φορμαλισμού η λογική εκφράζονταν δια μέσου του ενάρθρου λόγου σαν σύνολο συμπερασματικών κανόνων, και δεν ήταν αξιωματικά θεμελιωμένη.

Στη λογική των κατηγορημάτων του Αριστοτέλη για φιλοσοφικούς λόγους, δεν υπήρχε η έννοια του καθολικού ποσοδείκτη και τα κατηγορήματα αναφέρονταν σε μια μεταβλητή. Με τον φορμαλισμό η λογική έγινε κλάδος των μαθηματικών και αναπτύσσεται απεριόριστα, πάντοτε όμως στηριγμένη στα θεμέλια του Αριστοτέλη. Ο μαθηματικός χαρακτήρας της σύγχρονης λογικής δεν φαίνεται μόνο από τη γλώσσα με την οποία εκφράζεται, αλλά ιδίως από την αξιωματική θεμελίωσή της. Η απαραίτητη ύπαρξη αξιωματικού συστήματος στη δομή του λογικού οργάνου φανερώνει πως τα μαθηματικά και η λογική είναι από την ίδια «ουσία», δηλαδή την παραγωγική σκέψη, που εξασφαλίζει συνέπεια ανάμεσα στη θεμελίωση και την εποικοδόμηση. Μια συνεχής αφαίρεση στους χαρακτήρες λειτουργίας των διαφόρων λογικών οδηγεί σένα κοινό χαρακτήρα, την συνέπεια, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί σαν την «ουσία» των λογικών.

III) Ο Descartes και ο Leibniz είχαν την εντύπωση πως είναι δυνατόν με το λογικό όργανο και μόνο να ανακαλύψουν μεθόδους, με τις οποίες να μπορούν να παράγουν όλες τις αλήθειες, που είναι συνέπειες δομένου αξιωματικού συστήματος. Δυστυχώς όμως οι προσπάθειες, που αποσκοπούν στη λύση των προβλημάτων τα οποία είναι πλήρως καθορισμένα, οδηγούν στην αποδεικτική λογική, δηλαδή στην άλγεβρα των προτάσεων και των κατηγορημάτων. Δεν υπάρχει συγκεκριμένη μέθοδος ανακάλυψης νέων αληθειών· ο δημιουργικός νους θα συλλάβει το πρόβλημα και θα διαισθανθεί την αλήθεια, ενώ η λογική λειτουργία θα επικυρώσει την συνέπεια της νέας αλήθειας με το αξιωματικό σύστημα. Ο φορμαλισμός υπηρετεί την νόηση, δεν την αντικαθιστά.

IV) Το αξίωμα της ταυτότητας $A \rightarrow A$ είναι ανεξάρτητο από κάθε μεταβολή, που μπορούμε να φανταστούμε σε μια πραγματικότητα, γιατί η διαμόρφωση της πραγματικότητας εξαρτάται από την επάρκεια της σχέσης υποκειμένου και αντικειμένου, σε τρόπο, που η συνεργασία τους να είναι αποτελεσματική μέσα σ' αυτό που συνειδητοποιεί το υποκείμενο, δηλαδή να υπάρχει η δυνατότητα της πρόβλεψης. Αυτή η ισορροπία, που προέρχεται από μια συμφωνία του υποκειμένου και του αντικειμένου, συνθέτει το κύρος της πραγματικότητας, το οποίο, αν κλονιστεί για οποιονδήποτε λόγο, τότε μεταβάλλονται και οι σχέσεις του υποκειμένου με το αντικείμενο, για να διαμορφωθούν νέες ισορροπίες, δηλαδή νέα πραγματικότητα, στην οποία θα λειτουργήσει το λογικό όργανο, ανεξάρτητα από τη συνείδηση που προσφέρει η εκάστοτε πραγματικότητα. Π.χ. η κλασσική λογική εφαρμόζεται με επιτυχία και στη μηχανική του Νεύτωνα και στη σχετικότητα του Αϊνστάϊν.

Σαν δεύτερο παράδειγμα φορμαλισμού μπορούμε να έχουμε τη λογική των κατηγορημάτων, την οποία δεν θα αναπτύξουμε, γιατί ξεφεύγει του σκοπού μας· θα δώσουμε όμως τον ορισμό του κατηγορήματος και θα παρατηρήσουμε ότι ο φορμαλισμός της λογικής των κατηγορημάτων είναι ανάλογος με αυτόν που εκθέσαμε για την άλγεβρα των προτάσεων.

Η λογική των κατηγορημάτων οφείλει και αυτή πολλές από τις αρχές της στο τεράστιο έργο του Αριστοτέλη· επειδή όμως ο έναρθρος λόγος δεν έχει την καθαρότητα και την απλότητα της μαθηματικής γλώσσας, και επιπλέον στους αρχαίους Έλληνες υπήρχε μια προκατάληψη για την έννοια του απείρου, το λεπτό πνεύμα της σχολής του Αριστοτέλη δεν κατόρθωσε να βάλλει σε όλη την έκταση τα θεμέλια της λογικής των κατηγορημάτων, χωρίς όμως αυτό να σημαίνει πως και αυτής

της λογικής ο Αριστοτέλης δεν είναι ο πραγματικός θεμελιωτής.

Αν θέλουμε να δώσουμε ένα μαθηματικό ορισμό του κατηγορήματος μπορούμε να ορίσουμε ότι κατηγορημα είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο σύνολο και πεδίο τιμών το σύνολο των προτάσεων. Μπορούμε γενικότερα να πούμε πως κατηγορημα είναι μια έκφραση που αναφέρεται σε μια (ή και περισσότερες) ακαθόριστη οντότητα x (ή στις οντότητες x, y, z, \dots), η οποία έκφραση γίνεται πρόταση, όταν η x (ή τα x, y, z, \dots) γίνει συγκεκριμένη (ή γίνουν συγκεκριμένες).

Από παραδείγματα μπορούμε να συλλάβουμε την έννοια του κατηγορήματος. Π.χ. Ο x είναι ένας άνθρωπος, είναι ένα κατηγορημα, γιατί μπορούμε να έχουμε τις προτάσεις: ο Αριστοτέλης είναι ένας άνθρωπος, ο αετός είναι ένας άνθρωπος· η πρώτη πρόταση παίρνει την τιμή «αλήθεια», ενώ η δεύτερη παίρνει την τιμή «ψέμα». Ο $x > y$, είναι ένα κατηγορημα, όταν τα x και y είναι στοιχεία του συνόλου των πραγματικών αριθμών, γιατί έχουμε πάντοτε προτάσεις, σαν τις $5 > 2, 3 > 7, 6 > 1$, κ.τ.λ. που παίρνουν μία τιμή από τις τιμές «αλήθεια», «ψέμα». Τα κατηγορήματα συμβολίζουμε ως εξής, $f(x)$, $R(x)$, όταν αναφέρονται σε μια αόριστη οντότητα ή γενικώς $f(x_1, x_2, \dots)^2$, όταν αναφέρονται σε πολλές οντότητες. Οι παραπάνω συμβολισμοί είναι δανεισμένοι από τούς συμβολισμούς των συναρτήσεων.

Η κατασκευή των τύπων της λογικής των κατηγορημάτων γίνεται πάλι με τη βοήθεια των γνωστών συνδέσμων: $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, -$

Π.χ. ας θεωρήσουμε δύο κατηγορήματα $R(x), f(x), R(x) \rightarrow f(x)$ κ.τ.λ. Έτσι με σύστημα συμβόλων τα κατηγορήματα και τα γνωστά σύμβολα $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim, -$ προχωρούμε στη φορμαλιστική διατύπωση. Εξ άλλου είναι γνωστό πως ολόκληρη η λογική του Αριστοτέλη συμπληρωμένη εκφράζεται με ένα συγκεκριμένο φορμαλισμό.

* *

Επειδή κάθε φορμαλισμός είναι η τυπική έκφραση μιας λογικής, μπορούμε να πούμε ότι η πολλαπλότητα των φορμαλισμών είναι η απόδειξη της ύπαρξης πολλών και διαφορετικών λογικών και προφανώς δίδει το πλήθος αυτών.

Η κλασσική λογική εφαρμόζεται γενικώς με επιτυχία σε κάθε πεπερασμένη συλλογή, γι' αυτό πολλοί υποστηρίζουν πως είναι η φυσική των πραγμάτων, ενώ άλλοι δέχονται ότι είναι διαισθητικοί νόμοι, που επιβεβαιώνονται από την εμπειρία. Είναι βέβαιο πως κάτω από τον φορμαλισμό κρύβεται κάτι, που δεν είναι εύκολο να προσδιοριστεί και αποτελεί πρόβλημα μεγάλης σημασίας για την επιστήμη και τη φιλοσοφία. Ο φορμαλισμός είναι μία από τις μεγαλύτερες επιτυχίες της επιστήμης της λογικής, διότι κατόρθωσε να περιγράψει τη μορφή της κλασσικής λογικής, και επιπλέον να δημιουργήσει δομές της ίδιας φύσης, δηλαδή φορμαλισμούς, οι οποίοι μπορεί να μην αντικαθιστούν την κλασσική λογική, αλλά σίγουρα πολλαπλασιάζουν μερικές θεμελιώδεις δυνατότητες της νοήσεως. Συγκεκριμένα ο φορμαλισμός είναι η αρχή και το τέλος όλων των ηλεκτρονικών υπολογιστών, οι οποίοι απελευθερώνουν τον άνθρωπο από μια βάρβαρη και ανιαρή διανοητική εργασία.

Ο φορμαλισμός δεν περιορίζεται μόνο στην κλασσική λογική και σ' αυτές που χρησιμοποιούνται στους υπολογιστές, αλλά είναι κυρίως η τυπική έκφραση των μαθηματικών δομών, τις οποίες απάλλαξε από τη διαισθητική ανακρίβεια και επρόκισε με περισσότερες δυνατότητες· δηλαδή η φορμαλιστική λογική (συμβολική λογική) έδωσε στο μαθηματικό όργανο αποδεικτικές ικανότητες, που δεν είχε με τη

δαισθητική λογική. Κάθε μαθηματική δομή είναι ο φορμαλισμός της κλασσικής λογικής, του οποίου το αξιωματικό σύστημα διευρύνεται κατάλληλα με σκοπό την θεμελίωση συγκεκριμένης δομής, δηλαδή μια μαθηματική δομή δεν είναι τίποτε άλλο παρά η λογική του Αριστοτέλη συμπληρωμένη με ένα πλήθος αξιωμάτων. Ο φορμαλισμός από τη μια μεριά εκφράζει τη κλασσική λογική και τις μαθηματικές δομές, και από την άλλη προσφέρει κυρίως τεχνική λογισμού, που ξεπερνά απεριόριστα την ανθρώπινη δυνατότητα.

Η λογική του Αριστοτέλη, συμπληρωμένη μέσα σε μία φορμαλιστική έκφραση, προσφέρει στη νόηση τις δύο παρακάτω μοναδικές και αξεπέραστες δυνατότητες, οι οποίες είναι τόσο χαρακτηριστικές, ώστε αυτές και μόνο μπορούν να την ορίσουν:

α) Αν ξεκινήσουμε από υποθέσεις, δηλαδή από δομένες τιμές αρχικών τύπων, μπορούμε να βγάλουμε συμπεράσματα με κάποια βεβαιότητα, πράγμα που σημαίνει πως με την βοήθεια των συμπερασματικών κανόνων έχουμε την ευχέρεια να αποφανθούμε για τις τιμές τύπων, τους οποίους συνθέσαμε από τους αρχικούς.

β) Αν με συγκεκριμένες υποθέσεις καταλήξουμε σε ορισμένα συμπεράσματα, τα οποία μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ψευδή, τότε είμαστε βέβαιοι ότι οι υποθέσεις μας είναι λάθος· δηλαδή αν λάβουμε αρχικούς τύπους με την τιμή «αλήθεια» και σχηματίσουμε με τη βοήθεια των συμπερασματικών κανόνων τύπους, οι οποίοι είναι η άρνηση αξιωμάτων της λογικής, τότε έχουμε την βεβαιότητα πως σέναν το ελάχιστο από τους αρχικούς τύπους αντιστοιχεί η τιμή «ψέμα». Είναι αλήθεια ότι υπάρχουν προτάσεις στις οποίες δεν μπορούμε να δώσουμε με βεβαιότητα μια από τις τιμές «ψέμα», «αλήθεια»· αυτό όμως δεν μειώνει τις δυνατότητες της λογικής, γιατί οι προτάσεις αυτές είναι πολύ σπάνιες ή σοφιστικές. Ακόμα παρατηρούμε πως και όταν έχουμε δεχθεί την εγκυρότητα της διαίσθησης του πεπερασμένου, η κλασσική λογική δεν εφαρμόζεται κατά τρόπον έκδηλον, παρά μόνον στις περιπτώσεις αντικειμένων και κατηγορημάτων, τα οποία δίδονται άμεσα, δηλαδή δεν ορίζονται από άλλα αντικείμενα ή κατηγορούμενα, π.χ., αυτό το τραπέζι, αυτό τι σπίτι, κ.τ.λ.

Θα δώσουμε παραδείγματα, όπου ο ορισμός των αντικειμένων και κατηγορημάτων δεν είναι άμεσος, και στα οποία η κλασσική λογική φαίνεται πως δεν εφαρμόζεται επιτυχώς:

Το παράδοξο του κουρέα:

Θεωρούμε το πλήθος X των κατοίκων χωριού, οι οποίοι ξυρίζονται, και ότι στο χωριό υπάρχει ένας μόνο κουρέας K , ο οποίος ξυρίζεται.

Αν Y είναι το πλήθος των χωρικών, που ξυρίζονται μόνον τους και όχι από τον μοναδικό κουρέα K , τότε έχουμε δύο περιπτώσεις:

α) Ο κουρέας K είναι μέλος του πλήθους Y , που σημαίνει ότι ξυρίζεται μόνος του (δηλαδή από τον κουρέα του χωριού) και συνεπώς δεν μπορεί να είναι μέλος του πλήθους Y , όπερ άτοπον, διότι υποθέσαμε το αντίθετο.

β) Ο κουρέας K δεν είναι μέλος του πλήθους Y , που σημαίνει πως δεν ξυρίζεται μόνος του, αλλά από τον κουρέα του χωριού, ο οποίος είναι ο ίδιος, δηλαδή ο κουρέας K είναι μέλος του πλήθους Y , όπερ άτοπον, διότι υποθέσαμε το αντίθετο.

Μπορούμε να απαντήσουμε στην περίπτωση αυτή, πως το άτοπον προέρχεται από το γεγονός, ότι δεν υπάρχει ένας κουρέας, όπως περιγράφεται έ μ ε σ α στο γνωστό παράδειγμα, δηλαδή η περιγραφή ορισμού του κουρέα είναι ένας φαύλος κύκλος.

Το παράδοξο του Berry

Το παράδοξο του Berry είναι ο ορισμός του πιο μικρού ακεραίου θετικού αριθμού, ο οποίος δεν ορίζεται με λιγότερο πλήθος από 1000 λέξεις της ελληνικής γλώσσας.

Υπάρχουν πολλά παράδοξα, που προέρχονται από τους κακούς ορισμούς των αντικειμένων και είναι ανεξάρτητα από την πολλαπλότητα, την οποία δεχόμαστε για την εφαρμογή της λογικής.

Η κλασσική λογική εφαρμόζεται με επιτυχία σε συλλογές αντικειμένων, τα οποία δίδονται άμεσα, και επιπλέον τα κατηγορήματα που αναφέρονται στα αντικείμενα ορίζονται από άλλα, τα οποία είναι άμεσα δομένα, και κατά τρόπο αποκλείεται η λήψη του αιτούμενου και ο φαύλος κύκλος.

Συνεπώς μπορούμε να πούμε πως η κλασσική λογική εφαρμόζεται σε συλλογές αντικειμένων, που έχουν τα παρακάτω χαρακτηριστικά:

α) Τα αντικείμενα είναι άμεσα δομένα.

β) Οι συλλογές είναι συμπληρωμένες με τη βοήθεια μιας καθορισμένης πολλαπλότητας, η οποία δεν είναι υποχρεωτικά πεπερασμένη.

γ) Τα κατηγορήματα, που αναφέρονται στα αντικείμενα ή είναι άμεσα δομένα ή προκύπτουν με τη βοήθεια μιας ορισμένης πολλαπλότητας κατηγορημάτων, τα οποία δεν αναφέρονται στον ορισμό των αντικειμένων. Π.χ. ο Κουρέας K του χωριού A είναι προικισμένος με κατηγορήματα, τα οποία αναφέρονται στον ίδιο τον ορισμό του, όπως τα παρακάτω.

α) ο X είναι συγχωριανός των κατοίκων του χωριού A .

β) ο X είναι ο μοναδικός κουρέας του χωριού A και ξυρίζει ένα μέρος των κατοίκων του χωριού A .

γ) ο X δεν μένει αζύριτος.

Προφανώς, αν στα προηγούμενα κατηγορήματα αντικαταστήσουμε τον X με τον κουρέα K , τότε τα κατηγορήματα γίνονται προτάσεις, στις οποίες, σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε για τον κουρέα K του χωριού, αντιστοιχούμε την τιμή «αλήθεια».

* *

Η κλασσική λογική, όταν εφαρμόζεται με συγκεκριμένο τρόπο, δηλαδή χωρίς γενικότητες και αοριστίες, δεν είναι ούτε η φυσική των πραγμάτων ούτε διαισθητικοί κανόνες.

Στη λογική των προτάσεων ή των κατηγορημάτων, όταν περιοριζόμαστε σε πεπερασμένες συλλογές, η τιμή «αλήθεια» ή «ψέμα», τις οποίες παίρνει ένας τύπος, που κατασκευάζεται από συμπερασματικούς κανόνες, είναι απόλυτα και κατά πεπερασμένο τρόπο ορισμένη από τις τιμές των αρχικών προτάσεων ή κατηγορημάτων και δεν έχει κανένα χαρακτήρα πειραματικό ή διαισθητικό. Οι συμπερασματικοί κανόνες ενεργούν σε πεπερασμένο πλήθος τύπων με ορισμένες τιμές και είναι απαλλαγμένοι από οποιοσδήποτε διαισθητικές έννοιες, που μπορεί να έχουν οι αρχικοί τύποι, δηλαδή λειτουργούν ανεξάρτητα από κάθε διαίσθηση. Αυτό γίνεται ακόμα φανερότερο, όταν εφαρμόζουμε την κλασσική λογική σε μαθηματικές δομές, οι οποίες δεν είναι ευκλείδειες και δεν εκφράζουν το διαισθητικό χώρο. Η επιλογή των

αρχικών προτάσεων ή κατηγορημάτων είναι πάντοτε συζητήσιμη, διαισθητική ή και αυθαίρετη. Η λογική είναι το μοναδικό όργανο της νόησης με το οποίο μπορούμε, όταν ξεκινάμε από ένα δοσμένο αξιωματικό σύστημα, να αναζητούμε, ανεξάρτητα από τη διαίσθηση και το πείραμα, την πολυπληθέστερη συλλογή προτάσεων και κατηγορημάτων, η οποία δεν είναι αντιφατική με την αρχική επιλογή των αξιωμάτων. Τέλος το λογικό όργανο συντελεί στην καλή και σωστή επιλογή ενός αξιωματικού συστήματος, γιατί κάθε αξίωμα πρέπει να πληρεί δύο συνθήκες της οποίες επιβάλλει η λογική συνέπεια: Το αξίωμα δεν μπορεί να είναι ούτε η άρνηση αξιώματος της λογικής, ούτε συμπερασματικός τύπος άλλων αξιωμάτων.

Η νόηση οπλισμένη με τις δυνατότητες του λογικού οργάνου κατόρθωσε να επιτύχει τις μεγαλύτερες επιστημονικές ανακαλύψεις, πέρα από την άμεση εμπειρία και την πειραματική παρατήρηση. Μια επιστημονική θεωρία είναι η λογική επεξεργασία μιας διαίσθησης αξιωματικά θεμελιωμένης. Η πειραματική επιστήμη έρχεται να επιβεβαιώσει ή να διαψεύσει τη θεωρία. Στις μεγάλες ανακαλύψεις προηγήθηκε το λογικό σχήμα, δηλαδή η θεωρία, από την επαλήθευση. Για να γίνει αυτό φανερό επιβάλλεται μια ιστορική αναδρομή σε μερικές θεμελιακές κατακτήσεις της επιστήμης.

Ας πάρουμε σαν πρώτο παράδειγμα την ανακάλυψη του νόμου της έλξης του Νεύτωνα (Newton). Στην αρχαιότητα πίστευαν πως οι πλανήτες περιστρέφονται γύρω από τη Γη, γιατί είχαν ψυχή, η οποία τους έδινε τη δυνατότητα της κίνησης. Βεβαίως στην εποχή του Νεύτωνα (Newton) το γεωκεντρικό σύστημα του Πτολεμαίου ήταν καταδικασμένο και ο Κέπλερ (Kepler) είχε ανακαλύψει τους νόμους κίνησης των πλανητών, δηλαδή ότι διαγράφουν ελλείψεις με εστία τον Ήλιο· αλλά η μεγάλη θεωρία που έδωσε την πρώτη δομή του κόσμου δεν είχε ακόμα εμφανιστεί. Ο Νεύτωνας συλλαμβάνει την ιδέα της έλξης των σωμάτων χωρίς να μπορεί να διατυπώσει και τον νόμο που την εκφράζει. Διαισθάνεται πως η δύναμη της έλξης εξαρτάται από την ποσότητα της ύλης των σωμάτων, τα οποία έλκονται, πράγμα που δεν ήταν αρκετό για τη διαμόρφωση του νόμου. Η μεγαλοφυής ιδέα έπρεπε να περάσει από το όργανο της λογικής για να διατυπωθεί ο παγκόσμιος νόμος, ο οποίος δεν είναι προϊόν πειράματος ή παρατήρησης ή ακόμα μιας έμπνευσης, αλλά αποτέλεσμα λογικής επεξεργασίας ιδεών, είναι το λογικό συμπέρασμα επιστημονικών υποθέσεων. Πράγματι ο Νεύτωνας υπέθεσε πως η δύναμη F της έλξης είναι ανάλογη των μαζών m_1, m_2 των σωμάτων που έλκονται, και επιπλέον ότι είναι μια συνάρτηση $f(R)$ της απόστασης αυτών. Δεν έκαμε όμως καμιά υπόθεση για την συνάρτηση $f(R)$, αλλά την αναζήτησε μέσα από το μαθηματικό λόγισμό και τη λογική μελέτη των επιστημονικών γνώσεων της εποχής του. Μέ την υπόθεση ότι οι τροχιές των πλανητών είναι κλειστές απέδειξε μαθηματικώς πως η συνάρτηση $f(R)$ πρέπει να έχει μία από τις δύο μορφές:

$$f(R) = CR \text{ ή } f(R) = \frac{C}{R^2}$$

Τέλος, αποκλείσε την πρώτη περίπτωση, γιατί το σημείο που έλκει τη μάζα κι έπρεπε να κατέχει το κέντρο της ελλειπτικής τροχιάς, δηλαδή ο Ήλιος, θα ήταν στο κέντρο και όχι στην εστία της έλλειψης, που διαγράφει η Γη. Έτσι λοιπόν η πρώτη εικόνα του κόσμου δόθηκε από τον τύπο:

$$F = K \frac{m_1 \cdot m_2}{R^2}$$

που ανακάλυψε ο Νεύτωνας με τη βοήθεια της λογικής του Αριστοτέλη. Είναι ιστορικό γεγονός πως ο πρώτος παγκόσμιος νόμος είναι καρπός παραγωγικής σκέψης, δηλαδή λογικής διεργασίας μιάς γόνιμης διαίσθησης.

Όλες οι μεγάλες θεωρίες της νεώτερης φυσικής είναι λογικά κατασκευάσματα στηριγμένα σε υποθέσεις, πού φαίνεται πως εκφράζουν ικανοποιητικά κατηγορίες φαινομένων. Π.χ. ο Μάξγουελ, έχοντας ως υπόθεση τη συνύπαρξη των ηλεκτρικών και μαγνητικών πεδίων, διαμόρφωσε τις διαφορικές εξισώσεις, που περιγράφουν την επίδραση της μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου στο μαγνητικό, και αντιστρόφως. Από τη μαθηματική μελέτη των διαφορικών εξισώσεων προέκυψαν τόσα αποτελέσματα, ώστε να συνθέσουν την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, η οποία οδήγησε σε γνώσεις και εφαρμογές, που αποτελούν τη βάση της σύγχρονης τεχνολογίας και επιστήμης.

Η ανακάλυψη του πλανήτη Ποσειδώνα από τον Λεβερριέ είναι ένα κλασικό και καθαρό παράδειγμα επιτυχίας του λογικού οργάνου, γιατί έγινε αναμφισβήτητα χωρίς τη βοήθεια πειράματος και παρατήρησης. Ακόμα, κατά διαισθητική υπόθεση, την ύπαρξη αγνώστου πλανήτη προκάλεσαν οι διάφορες λογικές αντιφάσεις στη μαθηματική μελέτη του γνωστού προβλήματος των τριών σωμάτων. Ο Λεβερριέ όχι μόνο δεν ήταν παρατηρητής, αλλά και μετά την ανακάλυψη του Ποσειδώνα δεν είχε την περιέργεια να τον δει, όταν οι παρατηρητές του ανακοίνωσαν πως ο μέχρι τότε άγνωστος πλανήτης έφτασε ακριβώς στην ώρα του για τη συνάντηση που του είχε ορίσει. Λέγεται πως ο μεγάλος θεωρητικός αστρονόμος είπε χαρακτηριστικά: Δεν είναι ανάγκη να τον ξαναδώ, γιατί τον πρωτογνώρισα στην άκρη της γραφίδας μου. Κανείς δεν είναι σε θέση να βεβαιώσει τα λόγια του Λεβερριέ· μπορούμε όμως να συλλάβουμε τη συγκίνηση που προκάλεσε η επαλήθευση του κύρους της λογικής. Ο άνθρωπος για μία φορά ακόμα αισθάνεται ελεύθερος από την άμεση απλοϊκή εμπειρία.

Από την εποχή του Ευκλείδη, που η απόδειξη απελευθερώνει τη λογική από την εμπειρία, είναι αναρίθμητα τα παραδείγματα των μεγάλων θεωρητικών ανακαλύψεων. Μπορούμε να υποστηρίξουμε πως στη πορεία της επιστημονικής εξέλιξης προηγείται η θεωρία της πειραματικής επαλήθευσης.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1) Η επιστημονική υπόθεση του Κοπέρνικου για την ετήσια παράλλαξη, επαληθεύτηκε με τη βοήθεια τηλεσκοπίων, τα οποία κατασκευάστηκαν ειδικώς γιαυτό το λόγο. 2) Πέρασε ένας αιώνας από την έκδοση των Principia για να επινοηθεί η μηχανή του Atwood, με την οποία επαληθεύτηκε ο δεύτερος νόμος του Newton. 3) Στη σύγχρονη φυσική συνεχώς επινοούνται πειραματικές διατάξεις νέων οργάνων για την επαλήθευση προβλέψεων μιας θεωρίας· π.χ. ο γιγάντιος μετρητής σπινθήρων σχεδιάστηκε για την πειραματική απόδειξη ύπαρξης νετρονίου.

Οι επιστημονικές παρατηρήσεις κι οι πειραματικές μετρήσεις αξιοποιούνται μόνον, όταν υπάρχει θεωρία στην οποία εντάσσονται· διαφορετικά ξεχνιούνται σαν ασήμαντες πληροφορίες μέσα στην πορεία της επιστήμης. Συνεπώς η γόνιμη θεωρία, η οποία είναι το προϊόν της λογικής και της διαισθητικής υπόθεσης, ανοίγει το δρόμο για μια επιστημονική επανάσταση.

* *

Τελειώνοντας το σύντομο αυτό άρθρο, που αναφέρεται στο φορμαλισμό και στην κλασική λογική, είναι απαραίτητο να δούμε σε ποιά συμπεράσματα μπορούμε να καταλήξουμε:

1) Η κλασική λογική είναι το μόνο όργανο, το οποίο δίνει τη δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων. Ο φορμαλισμός της φυσικής λογικής προσφέρει αλγορίθμους με τη βοήθεια των οποίων πολλές φορές είναι δυνατόν να επιτύχουμε συμπεράσματα, τα οποία με κανέναν άλλο τρόπο δεν εξάγονται. Π.χ. η κλασική φορμαλιστική λογική μας επέτρεψε να αποδείξουμε πως δεν υπάρχει αλγόριθμος, ο οποίος να δίδει τις ακέραιες λύσεις μιάς τυχούσας διοφαντικής εξίσωσης. Το ενδιαφέρον τούτο μαθηματικό αποτέλεσμα είναι επίτευγμα μόνον της φορμαλιστικής λογικής του Αριστοτέλη και όχι της διαισθητικής.

2) Η μεγαλύτερη προσφορά του καθαρού φορμαλισμού είναι η εφαρμογή του στα προγράμματα των υπολογιστών δια των οποίων κατορθώνουμε να έχουμε λύσεις προβλημάτων με όσο θέλουμε μεγάλη προσέγγιση³, πράγμα που είναι αδύνατο χωρίς τη χρήση υπολογιστού.

3) Η διαισθητική παραδοχή εννοιών είναι αναγκαία προϋπόθεση για τη διαμόρφωση λογικού οργάνου, γιατί η διαίσθηση προσφέρει τον καθορισμό των συμβόλων, της πολλαπλότητας και του αξιωματικού συστήματος, των οποίων η εγκυρότητα στηρίζεται στην παραδοχή και σε τίποτε άλλο.

4) Το λογικό όργανο είναι ανεξάρτητο από τη φύση των πραγμάτων και δεν λειτουργεί με διαισθητικούς κανόνες, που μεταβάλλονται κατά περίπτωση. Οι κανόνες οι οποίοι εφαρμόζονται είναι αμετάβλητοι για μια καθορισμένη λογική και έχουν το χαρακτήρα της κατασκευαστικότητας και της συνέπειας.

5) Δεν υπάρχει όργανο, πέρα από τη φορμαλιστική ή την αριστοτέλεια λογική, με το οποίο μπορούμε να συνάγουμε συγκεκριμένα αποτελέσματα, τα οποία να οδηγούν σε επιστημονικές ανακαλύψεις.

6) Η επιστημονική μεθοδολογία των πειραματικών και μαθηματικών επιστημών στηρίζεται στην κλασική λογική ή στο φορμαλισμό.

7) Οι επιστημονικές υποθέσεις είναι καρπός μιας διαίσθησης, η οποία γεννιέται από τη συσσώρευση επιστημονικών παρατηρήσεων κατά τη διάρκεια μιας επίμονης προσπάθειας για την επαλήθευση καθιερωμένης θεωρίας. Η διατύπωση της θεωρίας είναι το προϊόν του λογικού οργάνου, που λειτουργεί μέσα σ' ένα σύστημα αρχικών διαισθητικών υποθέσεων.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Είναι ίσως απαραίτητο να γίνει μια σύντομη αναφορά στο *λογισμό των προτάσεων*, ώστε να έχει εποπτικά ενώπιόν του ο αναγνώστης τα όσα συζητούνται στο άρθρο μου (Για εκτενή ανάπτυξη του θέματος αυτού βλέπε Κ. Βουδούρη, *Λογική: Φιλοσοφική και συμβολική*, Αθήνα 1977).

1) Το σύστημα των συμβόλων της λογικής των προτάσεων αποτελείται από δύο είδη συμβόλων, δηλαδή από τους λογικούς συνδέσμους \wedge , \vee , \rightarrow , \sim , $-$ και από διάφορα γράμματα A , B , Γ , κ.τ.λ., τα οποία παριστάνουν προτάσεις, οι οποίες εκφράζουν ανακοινώσεις, ώστε σε κάθε μια να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία μόνο τιμή από τις τιμές: *αλήθεια*, *ψέμα*. Π.χ., στη πρόταση: ο αριθμός 12 είναι άρτιος, αντιστοιχεί η τιμή *αλήθεια*, ενώ στη πρόταση, ο αριθμός 3 είναι άρτιος, αντιστοιχεί η τιμή *ψέμα*.

Τέλος η πρόταση: «αύριο θα έχουμε καλοκαιρία» αποκλείεται από το σύστημα συμβόλων της λογικής των προτάσεων, διότι δεν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μία τιμή εκ των: αλήθεια, ψέμα.

Το σύμβολο \wedge είναι ένας λογικός σύνδεσμος που διαβάζεται και· το σύμβολο \vee είναι ένας λογικός σύνδεσμος που διαβάζεται ή. Το σύμβολο \rightarrow είναι ένας λογικός σύνδεσμος που διαβάζεται: αν ... τότε (ή έπειτα). Το σύμβολο \sim είναι ένας λογικός σύνδεσμος που διαβάζεται ισοδυναμεί ή είναι ισοδύναμο. Τέλος το σύμβολο \neg εκφράζει την άρνηση. Π.χ. 'Αν έχουμε την πρόταση Α, τότε η πρόταση $\neg A$ είναι άρνηση της Α, και αντίστροφως η Α είναι η άρνηση της $\neg A$, δηλαδή: $\neg\neg A = A$. [κανονικά η άρνηση επιγράφεται στο Α, αλλά την προτάσσω λόγω ελλείψεως τυπογραφικών στοιχείων].

Η πολλαπλότητα στη λογική των προτάσεων είναι η πεπερασμένη.

(Είναι γνωστό ότι για τις ίδιες λογικές διεργασίες χρησιμοποιούνται από άλλους άλλα σύμβολα, όπως η τελεία (.) για τη συμπλοκή, το αλογόπεταλο για τη συνεπαγωγή, το Λ για την αποκλειστική διάζευξη, το \sim για την άρνηση και το \equiv για την ισοδυναμία. Βλέπε και Κ. Βουδούρη, *ε.ά.*, 85-114).

- 2) Οι κανόνες κατασκευής τύπων από το σύστημα των συμβόλων ακολουθούν την παρακάτω γενική αρχή: Ένας τύπος σχηματίζεται από την διαδοχή αρχικών προτάσεων μεταξύ των οποίων υπάρχει υποχρεωτικά ένας σύνδεσμος από τους: $\wedge, \vee, \rightarrow, \sim$, ενώ η άρνηση προτάσεται των προτάσεων ή των τύπων και εκφράζει την άρνηση της πρότασης ή του τύπου.

Π.χ. Αν Α, Β είναι δύο προτάσεις, τότε μπορούμε να έχουμε τους παρακάτω τύπους.

$A \wedge B, B \wedge A, A \vee B, B \vee A, A \rightarrow B, B \rightarrow A, A \sim B, B \sim A, A, \neg A$

Αντίθετα πολλαπλότητες σαν τις παρακάτω δεν είναι τύποι

$A, B, \vee \Lambda, A \vee \Lambda B, \rightarrow \Lambda, \vee \rightarrow, \vee \Lambda, \Lambda B$ κ.τ.λ.

Τέλος, αν A_1, \dots, A_n είναι προτάσεις, τότε πολλαπλότητες της μορφής:

$(((A_1 \wedge A_2) \vee A_3) \rightarrow A_4) \dots$ είναι τύποι, ενώ οι πολλαπλότητες της μορφής:

$(A_1 \vee \Lambda \dots A_2) \rightarrow) \Lambda A \dots$ δεν είναι τύποι.

- 3) Η συλλογή των τιμών στη κλασική λογική, συνενώσ και στη λογική των προτάσεων, είναι οι τιμές: αλήθεια, ψέμα.
- 4) Για τη βαθύτερη κατανόηση του αξιωματικού συστήματος είναι προτιμότερο να δοθούν πρώτα οι συμπερασματικοί κανόνες και στη συνέχεια να συζητηθεί το αξιωματικό σύστημα της λογικής των προτάσεων, γιατί οι κανόνες και τα αξιώματα συμφύονται.
- 5) Οι συμπερασματικοί κανόνες στη λογική των προτάσεων είναι οι καλούμενοι αληθοπίνακες, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

Αληθοπίνακες (α)

Παίρνουμε δύο τυχαίους τύπους Α, Β και τον σύνδεσμο \wedge , στη συνέχεια σχηματίζουμε τον τύπο $A \wedge B$, με την γνωστή παράθεση των τύπων και την παρεμβολή του συνδέσμου \wedge . Παραμένει να οριστεί η τιμή του τύπου ($A \wedge B$) από τις τιμές των Α, Β, σύμφωνα με την γενική αρχή των συμπερασματικών κανόνων.

Ο παρακάτω αληθοπίνακας δίδει τις τιμές του τύπου ($A \wedge B$), για τις διάφορες τιμές των Α, Β και συγκριδώς ορίζει πλήρως τον πρώτο συμπερασματικό κανόνα.

A	B	$A \wedge B$ αληθοπίνακας (α)
αλήθεια	αλήθεια	αλήθεια
αλήθεια	ψέμα	ψέμα
ψέμα	αλήθεια	ψέμα
ψέμα	ψέμα	ψέμα

Παρατηρούμε πως ο τύπος ($A \wedge B$) δέχεται την τιμή *αλήθεια* μόνο στη περίπτωση που οι δύο τύποι Α, Β έχουν την τιμή *αλήθεια*, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση πέρνει την τιμή *ψέμα*.

Π.χ. αν θεωρήσουμε τις προτάσεις, «ο αριθμός 3 είναι περιττός», «ο αριθμός 12 είναι άρτιος», τότε η πρόταση «ο αριθμός 3 είναι περιττός και ο αριθμός 12 είναι άρτιος» πέρνει την τιμή *αλήθεια*.

Ομοίως, αν έχουμε τις προτάσεις (ο αριθμός 12 είναι περιττός), (ο αριθμός 3 είναι περιττός), τότε η πρόταση (ο αριθμός 12 είναι περιττός και ο αριθμός 3 είναι περιττός) παίρνει την τιμή: *ψέμα*.

Εκ των προηγουμένων παραδειγμάτων γίνεται φανερό πως ο αληθοπίνακας (α) εκφράζει επακριβώς την κοινή λογική.

Αληθοπίνακες: (β), (γ) και (δ)

Κατά ανάλογο τρόπο ορίζουμε τους υπολοίπους συμπερασματικούς κανόνες με την βοήθεια των παρακάτω αληθοπινάκων:

A	B	$A \vee B$ (β)	$A \rightarrow B$ (γ)	$A \sim B$ (δ)
αλήθεια	αλήθεια	αλήθεια	αλήθεια	αλήθεια
ψέμα	ψέμα	ψέμα	αλήθεια	αλήθεια
ψέμα	αλήθεια	αλήθεια	αλήθεια	ψέμα
αλήθεια	ψέμα	αλήθεια	ψέμα	ψέμα

Παρατηρήσεις:

1. Στη περίπτωση του (β) συμπερασματικού κανόνα ο τύπος $A \vee B$ παίρνει την τιμή *ψέμα* μόνον όταν και οι δύο τύποι A, B πάρουν την τιμή *ψέμα*. σε κάθε άλλη περίπτωση παίρνει την τιμή *αλήθεια*.
2. Στη περίπτωση του (γ) συμπερασματικών κανόνα ο τύπος $A \rightarrow B$ παίρνει την τιμή *ψέμα* μόνο, όταν ο τύπος A έχει την τιμή *αλήθεια* και ο τύπος B την τιμή *ψέμα*. Ο κανόνας αυτός λέγει ότι με αληθινή υπόθεση πρέπει να έχουμε την αληθινή απόδοση, για να είναι αληθινός ο τύπος που συνθέσαμε. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε πως ο (β) συμπερασματικός κανόνας εκφράζει τη φυσική λογική, γιατί η σύνθεση, π.χ., δύο προτάσεων με το διαζευκτικό ή είναι πρόταση αληθινή, όταν μια τουλάχιστον είναι αληθινή· αντίθετα για τον (γ) συμπερασματικό κανόνα δεν είναι τόσο προφανές πως εκφράζει την κλαστική λογική· και όμως είναι η φορμαλιστική μορφή της *συνεπαγωγής*, όπως ορίζεται στη λογική του Αριστοτέλη, διότι τυποποιεί τις παρακάτω ισοδύναμες διαβεβαιώσεις:

α) Αν η πρόταση A είναι αλήθεια, τότε η πρόταση B είναι αλήθεια.

β) Αν η πρόταση B είναι ψέμα, τότε η πρόταση A είναι ψέμα.

γ) Η πρόταση A δεν μπορεί να είναι αλήθεια και συγχρόνως η πρόταση B να είναι ψέμα.

δ) Η πρόταση A είναι ψέμα ή υποχρεωτικά η πρόταση B είναι αλήθεια. Μπορούμε επιπλέον να παρατηρήσουμε, ότι η συνεπαγωγή ($A \rightarrow B$) εκφράζει και την κοινή λογική αρχή, πως από εσφαλμένη υπόθεση οτιδήποτε έπεται. Τέλος ο B. Russell, προϋποθέτοντας την *συνεπαγωγή*, ορίζει την έννοια της πρότασης ως εξής:

Πρόταση είναι κάθε σύμβολο A, για το οποίο ο τύπος $A \rightarrow A$ έχει την τιμή *αλήθεια*.

Ο προηγούμενος ορισμός είναι πλήρης, γιατί μόνον οι προτάσεις έχουν την δυνατότητα να συνεπάγονται και να συνεπάγονται. Είναι λοιπόν προφανές πως η έννοια της πρότασης η οποία χρησιμοποιείται στη λογική δεν είναι ανεξάρτητη από την συνεπαγωγή.

3. Στην περίπτωση του (δ) συμπερασματικού κανόνα ο τύπος $A \sim B$ παίρνει την τιμή *αλήθεια* μόνον, όταν οι τύποι A, B έχουν συγχρόνως την αυτήν τιμή, ενώ σε κάθε άλλη περίπτωση λαμβάνει την τιμή *ψέμα*. Προφανώς ο (δ) συμπερασματικός κανόνας εκφράζει την κοινή λογική, γιατί είναι η φορμαλιστική μορφή της ισοδυναμίας του αληθινού με το αληθινό και του ψεύτικου με το ψεύτικο.

Αληθοπίνακας (ϵ)

Τέλος ορίζεται ο συμπερασματικός κανόνας της άρνησης από τον αληθοπίνακα (ϵ).

A	$\neg A$ (ϵ)
αλήθεια	ψέμα
ψέμα	αλήθεια

Για την ευκολότερη κατανόηση των συμπερασματικών κανόνων και ιδίως για να διαπιστώσουμε την ταύτιση της κλασικής φορμαλιστικής λογικής με τη διαισθητική μας λογική, είναι απαραίτητο να δούμε μερικά παραδείγματα

Ας θεωρήσουμε τις παρακάτω προτάσεις:

Ο αριθμός 12 είναι άρτιος, ο αριθμός 3 είναι περιττός, οι οποίες λαμβάνουν την τιμή «αλήθεια» και τις προτάσεις, ο αριθμός 12 είναι περιττός, ο αριθμός 3 είναι άρτιος, οι οποίες λαμβάνουν την τιμή «ψέμα». Η πρόταση, ο αριθμός 12 είναι άρτιος ή ο αριθμός 3 είναι άρτιος είναι σύνθετη πρόταση και λαμβάνει την τιμή «αλήθεια», γιατί μία από τις δύο που την συνθέτουν, παίρνει την τιμή «αλήθεια». Η πρόταση «ο αριθμός 3 είναι άρτιος, έπεται ότι ο αριθμός 12 είναι περιττός» είναι σύνθετη πρόταση και λαμβάνει την τιμή «αλήθεια», γιατί όταν η υπόθεση έχει την τιμή «ψέμα», τότε η τιμή της σύνθετης πρότασης είναι «αλήθεια» ανεξάρτητα από την τιμή της απόδοσης, πράγμα που συμφωνεί με την φυσική λογική, γιατί δεχόμαστε πως με λάθος υπόθεση, ότι θέλουμε μπορούμε να αποδείξουμε.

Η πρόταση «ο αριθμός 3 είναι άρτιος ισοδυναμεί ο αριθμός 12 είναι περιττός» λαμβάνει την τιμή «αλήθεια», γιατί και οι δύο προτάσεις, που την συνθέτουν, λαμβάνει την τιμή «ψέμα», δηλαδή το ψέμα είναι ισοδύναμο με το ψέμα. Η πρόταση «ο αριθμός 3 είναι περιττός» έχει τη τιμή «αλήθεια», ενώ η άρνησή της είναι η πρόταση «ο αριθμός 3 δεν είναι περιττός», η οποία λαμβάνει την τιμή «ψέμα».

Με τα προηγούμενα παραδείγματα γίνεται φανερό πως οι συμπερασματικοί κανόνες είναι η συμβολική έκφραση της Αριστοτελικής λογικής, που συνήθως χρησιμοποιούμε, απαλλαγμένη όμως από τη διαίσθηση, η οποία περιορίζεται στον καθορισμό των τιμών, που αντιστοιχούν στις αρχικές προτάσεις.

Τελειώνοντας τα περί του φορμαλισμού της λογικής των προτάσεων πρέπει να δούμε πως ορίζεται το αξιωματικό της σύστημα.

Παρατηρούμε πως οι συμπερασματικοί κανόνες ορίζουν τύπους, που λαμβάνουν την τιμή «αλήθεια», ανεξάρτητα από τις τιμές των αρχικών τύπων.

Π.χ. $A \vee \neg A$, $(A \wedge \neg A) \rightarrow B$, $(A \sim \neg A) \sim (A \wedge \neg A)$ κτλ. δηλαδή για οποιοσδήποτε τιμές των τύπων A , $\neg A$, B , οι παραπάνω σύνθετοι τύποι έχουν πάντοτε την τιμήν «αλήθεια».

Τύποι σαν τους προηγούμενους συνθέτουν το αξιωματικό σύστημα της λογικής των προτάσεων.

Τα αξιώματα της άλγεβρας των προτάσεων στην απλούστερη μορφή τους είναι οι παρακάτω τέσσερες ομάδες:

- I) α) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
 β) $A \rightarrow (B \rightarrow \Gamma) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Gamma))$
- II) α) $A \wedge B \rightarrow A$
 β) $A \wedge B \rightarrow B$
 γ) $(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge \Gamma))$
- III) α) $A \rightarrow A \vee B$
 β) $B \rightarrow A \vee B$
 γ) $(A \rightarrow \Gamma) \rightarrow ((B \rightarrow \Gamma) \rightarrow (A \vee B \rightarrow \Gamma))$
- IV) α) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
 β) $A \rightarrow \neg \neg A$
 γ) $\neg \neg A \rightarrow A$

Σένα φορμαλισμό είναι δυνατόν να αντικαταστήσουμε τη συλλογή των αξιωμάτων με ένα μέρος από τους συμπερασματικούς κανόνες, δηλαδή τα αξιώματα να θεωρηθούν σαν συμπερασματικοί κανόνες.

2. Τα κατηγορήματα με πολλές αόριστες οντότητες δεν εξέτασε ο Αριστοτέλης.
3. Η προσέγγιση εξαρτάται από τη «γενιά» του υπολογιστή.

ΛΑΜΠΡΟΣ ΝΤΟΚΑΣ
 ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΠΑΤΡΩΝ