ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ, 2 (1985), 49-57

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΥΣ Ή ΕΝΤΕΛΟΥΣ ΕΠΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΟΝ. ΛΙΒΕΡΗ

Το ανθρώπινο επιστητό — δηλαδή το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης για κάθε «τώρα» — έχει κύτταρό του την «Ιδέα». Τί είναι όμως «Ιδέα»; Πιστεύουμε πως είναι η τελική φάση μιας διαλογικής (διαλεκτικής) ανέλιξης της αντιληπτικής κυοφορίας του νου για κάθε μελετώμενη ιδιότητα του κάποιου αντικειμένου.

Έτσι και η ιδέα «Ένα», που είναι πιθανά η πρώτη αφηρημένη σύνθεση του ανθρώπινου νου, είναι το τρίτο στάδιο μιας ανέλιξης. Είναι η οικειοποίηση από το νου της έννοιας «Ένα», που σχηματίστηκε με την αναγνώριση της «ύπαρξης», της «παρουσίας», του «Είναι» ως ι δ ι ό τ η τ α ς του κάθε αντικειμένου, ενώ σε πρώτο στάδιο αυτή η «ύπαρξη» ήταν μια αδιευκρίνιστη επισήμανση του αντικειμενικά δοσμένου. Συνεπώς, μια ιδιότητα —ένας τρόπος διάκρισης— ενός αντικειμένου ξεκινάει ως μία «υπνώτουσα» παρατήρηση του νου, μετατρέπεται σε έννοια —με την αναγνώρισή της ως διακριτικού στοιχείου μιας κατηγορίας αντικειμένων— και σε τρίτο στάδιο, με τη μακρά συναναστροφή του νου με τα πράγματα— αποκτώντας μάλιστα λεκτικό προσδιορισμό— γίνεται κτήμα του νου και φαντάζει πια ως λογική κατασκευή, ως αυτόνομο πνευματικό σύνδρομο.

Πρόκειται τότε για την «Ιδέα» που χρησιμοποιείται ως μέσο επικοινωνίας με τα πράγματα, και χωρίς να θυμίζει τον τρόπο απόκτησής της. Αυτό συνέβηκε και με τη μεγαλειώδη ιδέα «Ένα» —μ' αυτόν το Δία της μαθηματικής δημιουργίας— που από την άποψη της «ύπαρξης» ταυτίζει όλα τα αντικείμενα —υλικά και νοούμενα— αφαιρώντας από τα πρώτα κάθε ιδιαίτερο — φυσικό, χημικό ή βιολογικό — χαρακτηριστικό. Κατακτώντας ο άνθρωπος την ιδέα «Ένα», *ανακάλυψε το λογικό του* και σφράγισε την πρόβλεψη πως θα υπάρξει γι' αυτόν πνευματική Ιστορία. Πραγματικά, ο νους, κατεχόμενος από την ιδέα των «Ένα» πραγμάτων, δηλαδή θεωρώντας το κάθε αντικείμενο μόνο ως ένα «Είναι», μπόρεσε να το αντιστοιχίζει με το κάθε άλλο «Ένα», αδιαφορώντας για τα τόσα και τόσο διάφορα χαρακτηριστικά τους δεδομένα. Έτσι φτάνει το απλό αρχικό ζευγάριασμα — την απλή ανταλλαγή δύο ετερόκλητων στοιχείων — να την αναγάγει σε «αρχή», την αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοίχησης, όπως ονοματίζουμε σήμερα τον τρόπο εξακρίβωσης *της ισοδυναμίας ή μη* (της ίδιας πληθικότητας ή μη) ανάμεσα σε δύο σύνολα διαφορετικών στοιχείων.

Και αυτό το πέρασμα από το απλό ζευγάριασμα δύο στοιχείων στην καθολική αντιστοίχηση δύο συνόλων είναι μία *«αναντικατάστατη πνευματική πράξη»,* που έρχεται να καλύψει ως γενικότητα το μερικό ζευγάριασμα, που για μακρύ χρόνο επαναλαμβανόταν.

Συλλαμβάνουμε δηλαδή μια μακρά κυοφορία του γενικού μέσα στό μερικό, που εκκολάπτεται στην απαιτούμενη πλήρωση του χρόνου. Μα η διαλεκτική πορεία του νου εξακολουθεί και η αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχηση γίνεται τόσο οικεία, με τη χρησιμοποίησή της, ώστε η δυνατότητα της προσφοράς της να τεθεί κάτω από αξιολόγηση. Και διαπιστώνεται έτσι το δεσμευτικό της μειονέκτημα: η πληθικότητα ενός συνόλου[1] να μην αποτιμάται αντικειμενικά —από μόνη της— αλλά σε σύγκριση με την πληθικότητα του κάποιου άλλου συνόλου, με το οποίο η ανάγκη επέβαλε τη σύγκριση. Όμως, η πληθικότητα είναι πια μια Έννοια, είναι ιδιότητα που αναγνωρίζεται σε κάθε συνάθροιση, σε κάθε ξεχώρισμα αντικειμένων — ίδιων ή ετερόκλητων— που παίρνεται ως ένα ολόκληρο και συνεπώς ζητάει την αποτίμησή της ως μια ξεχωριστή οντότητα, ως ατομικότητα. Και αναζητιέται από το νου η πληθικότητα —πρότυπο, η πληθικότητα— μονάδα. Αλλά αυτή την πληθικότητα τη φέρνει ο άνθρωπος μαζί του· πρόκειται για την πληθικότητα των δακτύλων των χεριών του στην οποία αρχικά κάποιοι άγριοι λαοί πρόσθεταν και την πληθικότητα των δακτύλων των ποδιών. Μα η πληθικότητα αυτή διδάσκει πως η μετάβαση από κάποια συγκεκριμένη πληθικότητα στην επόμενή της γίνεται με την προσθήκη ενός ακόμη στοιχείου, ενός *Ένα*. Και το εμπειρικό αυτό γεγονός, που διαπιστώνεται στην ολιγομελή πληθικότητα των δακτύλων των χεριών, γενικεύεται, γίνεται κανόνας, *αρχή*, ή *«αρχή της διαδοχής»*, ή *«αρχή του ύστερα»*. Ύστερα από την πληθικότητα Α έρχεται η πληθικότητα Α+1. Και έτσι με τη 2η αυτή *«αναντικατάσταση πνευματική πράξη»* πραγματοποιεί ο άνθρωπος την αρίθμηση: την αποτίμηση της *κάθε* πληθικότητας σε σύγκριση με τη μοναδική πληθικότητα, τη μία και μόνη, την πληθικότητα των δακτύλων των χεριών, μία ή περισσότερες φορές επαναλαμβανόμενη.

Αυτή είναι, κατά τη γνώμη μας, η διαλεκτική πορεία του ανθρώπινου νου, που από στάδιο σε στάδιο πραγματοποιεί τη μετάβαση από ένα επίπεδο αντίληψης στο αμέσως παραπάνω. Είναι μια πορεία από το μερικό στο γενικό, που παρουσιάζεται και ως πορεία από το συγκεκριμένο στο αφηρημένο ή από το αισθητό στο νοούμενο.

Όπως είδαμε, το αρχικό ζευγάριασμα δύο ετερόκλητων αντικειμένων, σε πρώτο στάδιο, γενικεύεται στην αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοίχησης δύο πληθικοτήτων και σε δεύτερο στάδιο αυτή η αντιστοίχηση μετατρέπεται σε αντικειμενική αποτίμηση, δηλαδή σε απαρίθμηση, με την εκλογή του συνόλου των δακτύλων των χεριών ως συνόλου-προτύπου, ως συνόλου-όρου σύγκρισης. Και εφεξής η απαρίθμηση των στοιχείων του κάθε συνόλου γίνεται καθημερινή πράξη, όταν ο άνθρωπος έφτασε να δημιουργήσει το συμβολικό και λεκτικό προσδιορισμό των στοιχείων αυτής *της ακολουθίας των αποτιμήσεων,* που ονομάστηκε σύστημα των φυσικών αριθμών.

Κάθε στοιχείο αυτού του συστήματος —που λέγεται και σύστημα των ακέραιων, των ολόκληρων, των *Ένα* αντικειμένων— φαντάζει, με την οικειοποίησή του από το νου, *ως αυτόνομο πνευματικό δεδομένο,* ως στοιχείο του ανθρώπινου πνευματικού εξοπλισμού. Και έτσι, δεν είναι ανεξήγητο, που ο Καθηγητής του Βερολίνου Leopold Kronecker (1823-1891) διακήρυξε πως:

Ο Θεός δημιούργησε τους φυσικούς αριθμούς,
όλα τα άλλα είναι ανθρώπινη δημιουργία[2],

δηλαδή πως το σύστημα των φυσικών αριθμών είναι πρωταρχικό θεμελιακό δεδομένο, ένα είδος εσωτερικής προφανότητας, παραγνωρίζοντας το διαλεκτικό μόχθο που, σύμφωνα με τα παραπάνω, κατέβαλε ο άνθρωπος χιλιετηρίδες ολόκληρες, για τη δημιουργία του. Ενώ, σ' αντίθεση, ο Bertrand Russell δήλωνε επιγραμματικά:

Θα χρειάστηκαν πολλοί αιώνες για να αποκαλυφτεί πως ένα ζευγάρι φασιανοί ή ένα ζευγάρι μέρες είναι παραδείγματα του αριθμού δύο[3].

Μοναδική ακόμη πηγή πληροφόρησης του νου είναι η εμπειρία, που, ενισχυμένη με καθαρή ενορατική θεμελίωση, υπαγορεύει τα εξής:

- κάθε φυσικός αριθμός έχει τόν επόμενό του·
- δεν υπάρχει τελευταίος φυσικός αριθμός·
- η ακολουθία των φυσικών αριθμών είναι ατέρμονη.

Η μεγάλη στιγμή εσήμανε. Το ανθρώπινο πνεύμα, ασκούμενο μέσα στη χρήση της δεύτερής του αρχής, της αρχής της διαδοχής, κάνει ι δ ι ό τ η τ ά του:

Να συλλαμβάνει την απεριόριστη επανάληψη της ίδιας πράξης, μόλις η πράξη αυτή γίνει μια φορά δυνατή[4].

Αυτή η ιδιότητα του πνεύματος, που για τον τωρινό άνθρωπο είναι καθημερινή πρακτική, του άνοιξε διάπλατα την πύλη του μαγικού κήπου του απείρου και του έγινε το μαγικό ραβδί στην εξουδετέρωση του Δράκου του μύθου.

Πραγματικά, εάν σ' αυτή την α π ο κ τ η μ έ ν η ιδιότητα προσθέσουμε και το κοινής αποδοχής αίτημα, πως

Ένα γεγονός δε γίνεται επιστημονικό παρά όταν μπορεί να επαναλαμβάνεται (που σημαίνει πως υπάρχει μόνιμη αιτία δημιουργίας του, δηλαδή σχέση αιτίας και αιτιατού, νόμος) τότε εξηγούμε: 1ο τον τρόπο καθιέρωσης από το πνεύμα *«της αρχής της πλήρους ή εντελούς επαγωγής»*, ή ακόμη *του αναδρομικού συλλογισμού*, ως συλλογιστικού εργαλείου προσπέλασης της σκέψης προς το απεριόριστα επαναλαμβανόμενο· και 2ο την αποκάλυψη της αρχικής προέλευσης και κατανόησης της έννοιας του *ορίου*.

Πραγματευόμενοι τον όρο *«απόδειξη»* γράψαμε: «μία αναγκαία σχέση»[5] είναι λογικά αποκαταστημένη ή αποδειγμένη, εάν προκύπτει ως λογική συνέπεια από το συνταίριασμα άλλων προτάσεων, που έχουν χαρακτηριστεί ή αναγνωριστεί από προηγούμενα ως αληθινές.

Αυτός ο τρόπος απόδειξης —που είναι πορεία από το γενικό στο μερικό— ονομάστηκε «απαγωγική μέθοδος» και βρήκε εφαρμογή, σχεδόν αποκλειστική, στη γεωμετρία. Και αυτός είναι ο λόγος, που η δομική σύνθεση της Γεωμετρίας λαμβάνεται ως μοντέλο στις ακριβείς επιστήμες. Όπως είναι φανερό, βασικό της στήριγμα είναι η αρχή της μη αντίφασης δηλαδή ο αποκλεισμός, για μια πρόταση που αποδεικνύεται, της άρνησής της.

Και τώρα ας διερωτηθούμε: Υπάρχει απόδειξη —δηλαδή κατωχύρωση μιας αναγκαίας σχέσης— στα μαθηματικά, που να οικοδομείται με την αντίστροφη πορεία, συνεπώς με την πορεία που οδηγεί από το μερικό στο γενικό; Είναι αλήθεια πως ο άνθρωπος πρώτα παρατήρησε το ένα πράγμα και έπειτα είδε τα πολλά. Αλλά από ποιά άποψη; Από την άποψη της αναγνώρισης και μόνο σε μια κατηγορία αντικειμένων μιας κοινής τους ιδιότητας, ενός τρόπου σύγκρισης, πού οδηγεί στό σχηματισμό μιας Έννοιας. Πιστεύουμε πως δε βαρβαρίζουμε, εάν ισχυριστούμε πως η πορεία από το μερικό στο γενικό είναι στατιστική δειγματοληψία που δεν έχει σχέση με τον τρόπο θεμελίωσης ενός μαθηματικού συμπεράσματος, με την εξαγγελία ενός μαθηματικού νόμου. Ο μαθηματικός νόμος είναι έκφραση καθολικής ισχύος, για την κατηγορία των μαθηματικών μεγεθών που συνδέει. Όταν, π.χ., υποβάλλουμε ένα αρκετά υψωμένο αριθμό δειγμάτων μολύβδου σε θέρμανση και εάν σε κάθε περίπτωση διαπιστώνουμε πως η τήξη αρχίζει, όταν το θερμόμετρο φτάνει στούς 328°, συμπεραίνουμε πως το σημείο τήξης του μολύβδου είναι οι 328°.

Το συμπέρασμα στηρίζεται στήν ακόλουθο πίστη: Όσο μεγάλος και αν είναι ο αριθμός των δειγμάτων με τα οποία θα πειραματιστούμε, *εφόσον οι συνθήκες παραμένουν οι αυτές,* τα αποτελέσματα θα μένουν τα ίδια. Τα ίδια δηλαδή αίτια έχουν τα ίδια αποτελέσματα και αντίστροφα. Αλλά τα αίτια και οι σχέσεις ανάμεσα σ' αυτά αποτελούν τις «συνθήκες», οι οποίες, εάν είναι εξακριβωμένα στοιχεία του πειράματος, οδηγούν στη σύσταση νόμου, που επαληθεύεται από την παρατήρηση και το πείραμα, αλλά που η τήρησή του είναι, έπειτα από τις προϋποθέσεις του, βέβαιη. Το βασικό λοιπόν στοιχείο συμπερασμού είναι αυτό που ο Russell αποκάλεσε *κληρονομικότητα.*

Μία δειγματοληψία, οσονδήποτε εκτεταμένη, δεν μπορεί να αποτελέσει επαγωγή δηλαδή συμπερασμό, αλλά μόνο *πιθανολογισμό.* Και έτσι, κατά τη γνώμη μας, κακώς ο τρόπος αυτός χαρακτηρίζεται επαγωγικός. Η ίδια η λέξη «επαγωγή» περιέχει την *αναγκαιότητα του συμπερασμού,* ενώ, ο συμπερασμός, όπως τον δημιουργεί το παραπάνω παράδειγμα της τήξης του μολύβδου, είναι απλώς π ρ ο τ ρ ο π ή για συμπερασμό. Δεν μπορεί λοιπόν να λειτουργήσει σωστά μια επαγωγή παρά, εάν,

1ο. Υφίστανται διαδοχικές επαληθεύσεις της παρατήρησης που προτρέπουν σε συμπερασμό, και

2ο. Υφίσταται κληρονομικός δεσμός ανάμεσα στην κάποια επαλήθευση και σ' εκείνη που μπορεί να ονομαστεί εφεξής της.

Δηλαδή ο δεσμός που επιτρέπει η 1η επαλήθευση να κληροδοτεί τα αποτελέσματά της —κάτω από την τήρηση των προϋποθέσεων— στη 2η και αυτή στην 3η κ.ο.κ... η κάποιας τάξης ν επαλήθευση να κληροδοτεί τα αποτελέσματά της στην επαλήθευση ν+1 τάξης και φυσικά *ανεξάρτητα της συγκεκριμένης τιμής του ν*[8].

Συμπέρασμα: Η επαγωγή λειτουργεί μόνο για προτάσεις που εξαρτώνται από το φυσικό αριθμό ν, που είναι *η μόνη μεταβλητή,* που ανταποκρίνεται στον καθορισμό μιας ακολουθίας διαδοχικών επαληθεύσεων με *κληρονομικότητα.*

Μόνο λοιπόν στα μαθηματικά μπορεί να υπάρξει επαγωγή δηλαδή αναγκαίος συμπερασμός και φυσικά για όλη την απεριόριστη διαδοχή των επαληθεύσεών της, μ' άλλους λόγους για την περίπτωση που η ε π α γ ω γ ή είναι πλήρης.

Ας δούμε τώρα την τεχνική παρουσίαση της μεθόδου.

Έστω π(ν) η πρότασή μας, που εκφράζει μια αναγκαία σχέση για κάθε τιμή του φυσικού ν.

Εάν η π(1), η π(2), η π(3), ... είναι σχέσεις επαληθευόμενες και συνεπώς αληθινές, δημιουργείται π ρ ο τ ρ ο π ή για τη διαβεβαίωση της π(1) για *κάθε* τιμή του φυσικού ν. Αλλά πώς να επιχειρηθεί μια τέτοια διαβεβαίωση, αφού δεν υπάρχει τ ε λ ε υ τ α ί ο ς φυσικός; Και ακόμη:

Υπάρχει *αναγκαιότητα* στην ισχύ της π(2) από το γεγονός ότι η π(1) είναι επαληθευόμενη από τα πράγματα σχέση; Και ακόλουθα, υπάρχει αναγκαιότητα στην ισχύ της π(3), πάλι από το γεγονός ότι η π(2) είναι επαληθευόμενη σχέση και μάλιστα η αναγκαστική συνέπεια στην ισχύ της π(1);

Κληροδοτεί λοιπόν η π(1) — εφόσον είναι σχέση επαληθευόμενη από τα πράγματα— την ισχύ της στην π(2) και η π(2) στην π(3)κ.ο.κ.;

Ζητιέται λοιπόν αναγκαστικά —μετά την επαλήθευση της π(1) ως αναγκαίας σχέσης — η διαπίστωση *κληρονομικού δεσμού ισχύος,* δηλαδή η διαπίστωση πως στην αλυσίδα: π(1), π(2), π(3), ... π(ν)... η κάθε μία από τις εκφραζόμενες αναγκαίες σχέσεις είναι ο *αποχρών*, ο *επαρκής λόγος* για την ισχύ της επόμενής της, η *μείζων* πρόταση, όπως το εννοούμε.

Και τί λοιπόν απομένει για να υπάρξει προσπέλαση προς το «αεί» επαναλαμβανόμενο; Προφανώς, για άλλη μια φορά αναζητιέται: η α ν α ν τ ι κ α τ ά σ τ α τ η π ν ε υ μ α τ ι κ ή π ρ ά ξ η που θα *τερματίσει* την αλυσίδα των απεριόριστου αριθμού επαληθεύσεων. Και αυτό τον τερματισμό τον ανευρίσκει το πνεύμα στην κατακτημένη απ' αυτό ιδιότητα: *να συλλαμβάνει την επανάληψη των χωρίς τέρμα επαληθεύσεων, ξεκινώντας από την μοναδική πρώτη επαλήθευση.*

Κωδικοποιώντας ο άνθρωπος αυτή του την *πρακτική*,καταλήγει στο εξής:

1ο. Διαπιστώνεται, επαληθευόμενη, η π(1) ως αληθινή.

2ο. Με την υπόθεση ότι π(κ), *όπου κ αυθαίρετη αλλά ορισμένη τιμή του ν*, είναι αληθινή, εξετάζεται, εάν η π(κ+1) είναι *αναγκαία* αληθινή.

Και επειδή, όπως είπαμε, το κ είναι *ορισμένη*, αλλά και *αυθαίρετη τιμή του ν*, η κληρονομικότητα μεταβιβάζεται σ' όλη την απεριόριστη διαδοχή των προτάσεων π(ν), με αφετηρία την π(1), *που είναι σχέση επαληθευόμενη*. Συγκεκριμένα:

Η π(1) είναι αληθινή, επαληθευόμενη. Δηλαδή η π(ν) εκφράζει αναγκαία σχέση για ν=1. Εάν τώρα μπορεί να διαπιστωθεί πως, με την *υπόθεση* πως η π(κ) είναι αληθινή, είναι *αναγκαία* αληθινή και η π(κ+1), εξασφαλίζουμε την προσπέλαση προς το απεριόριστα επαναλαμβανόμενο, αφού το κ όντας 1 κληροδοτεί την αναγκαιότητα στην π(2) και όντας 2 κληροδοτεί την αναγκαιότητα στην π(3) κ.ο.κ. α π ε ρ ι ό ρ ι σ τ α. Έτσι, ο μαθηματικός-φιλόσοφος με ικανοποιημένες την αίσθηση και την αντίληψη της διαδοχής και *χωρίς παραβίαση ή υπέρβαση των κανόνων της λογικής* γεφυρώνει την άβυσσο, που διαχωρίζει το πεπερασμένο και το άπειρο. Το περίεργο όμως είναι, ότι άργησε πάρα πολύ η κατασκευή αυτής της γέφυρας, αν και το υλικό της κατασκευής της ήταν εξαιρετικά απλό: δε χρειαζόταν παρά η τιμή κ του ν *να χαρακτηριστεί αυθαίρετη, αλλ' ορισμένη.*

Θα μπορούσε κάποιος να ρωτήσει: «Για ποιά τιμή του ν ομιλείς; Η απάντησή μου είναι: Ομιλώ για την *ορισμένη* τιμή κ του ν. Και πόσο είναι το κ; Το κ είναι ο όποιος φυσικός αριθμός θέλεις».

Ήταν ίσως η πρώτη φορά που το οξύμορο έγινε τόσο εποικοδομητικό.

Σχόλιο 1

Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται κανείς την προέλευση της ιδιότητας του πνεύματος: «να συλλαμβάνει την απεριόριστη επανάληψη της ίδιας πράξης, μόλις η πράξη αυτή γίνει μια φορά δυνατή», είναι γεγονός ότι αυτή η ιδιότητα εμπεριέχει την αναδρομική σκέψη. Γιατί, για να επαναλάβει το πνεύμα την πράξη, που πραγματοποιήθηκε προηγούμενα, του χρειάζεται να αναχθεί, να αναδράμει σ' αυτή την προηγούμενη πράξη. Έτσι, μια πρόταση, που η διαβεβαίωση της αλήθειας της θα απαιτούσε τη χρησιμοποίηση αυτής της ιδιότητας του πνεύματος, θα πρέπει να εξαρτιέται από τον αυθαίρετο φυσικό ν, που οι διακεκριμένες και συγκεκριμένες τιμές: 1, 2, 3,... ν... θα απαριθμούν τους όρους της ακολουθίας των σταδίων αυτής της απόδειξης.

Σχόλιο 2ο

Είναι εύλογο να χαρακτηρίσουμε τον αναδρομικό συλλογισμό ως κ α τ α ρ ρ ά κ τ η συλλογισμών με κοινή ελάσσονα πρόταση την π(1) και με τις μείζονές του προτάσεις *ενσωματωμένες* στον ίδιο μαθηματικό τύπο.

Και διερωτιόμαστε:

Εφαρμόζοντας τον αναδρομικό συλλογισμό, είμαστε βέβαιοι ότι πραγματοποιήσαμε και ολοκληρώσαμε την απόδειξη; Είμαστε βέβαιοι ότι αποκλείεται η αντίφαση μέσα σ' αὐτή την εικονογραφημένη (με το 2ο σκέλος του συλλογισμού) ατέρμονη διαδοχή των νοούμενων επαληθεύσεων; Βέβαια δηλώνουμε, γιατί η ατέρμονη διαδοχή των επαληθεύσεων συμπίπτει με την αποκτημένη ιδιότητα του πνεύματος «να συλλαμβάνει την απεριόριστη επανάληψη... Στην ερώτηση: «ισχύει για κ=λ;», απαντούμε ως εξής: παραδεχόμαστε λοιπόν ότι ισχύει για κ=λ—1.

Μα, αφού ισχύει για κ=λ—1, θα ισχύει και για κ+1=λ—1+1=λ, ενώ, το πέρασμα για την ισχύ της πρότασής μας από την αυθαίρετη, μα όμως συγκεκριμένη τιμή του κ=λ—1,στην επόμενή της, έγινε με τους κανόνες της τυπικής λογικής, όπως έγιναν με τους κανόνες της τυπικής λογικής και οι επαληθεύσεις: π(1), π(2), ...π(λ—1), που από υπόθεση είχαν πραγματοποιηθεί.

Ο αναδρομικός λοιπόν συλλογισμός είναι μια κατάληξη στην πορεία: Η έννοια του Ένα, η αρχή της αμφιμονοσήμαντης αντιστοίχησης, η αρχή της διαδοχής, ο αναδρομικός συλλογισμός. Και, εφόσον επαληθεύεται, αποτελεί την επικύρωση, *τη νομιμοποίηση της διαίσθησης,* που καθοδηγείται αρχικά από την περιορισμένη επαγωγή.

Σχόλιο 3ο

Αυτή η κατηγορηματική διαβεβαίωση της αναγκαίας σχέσης π(ν) έχει ένα *μειονέκτημα:* στηρίζεται στην υπόθεση:

«πως για κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ο επόμενός του»,

δηλαδή σε κάτι που προς το παρόν δεν έχει αναφερθεί ως λογική αναγκαιότητα, αλλά ως αποτέλεσμα εμπειρικής διαπίστωσης.

Υπεισέρχεται λοιπόν η αναγκαιότητα και εδώ της *πλήρους επαγωγής,* όσον αφορά το σύστημα των φυσικών αριθμών. Αλλά, επειδή η μεταβλητή ν συμπίπτει με τη συνάρτηση π(ν), το κενό αυτό αναπληρώθηκε από τα 5 αξιώματα Peano, που αποκαθιστούν την ακολουθία των φυσικών αριθμών σε νόμιμο μαθηματικο πεδίο ύπαρξης.

Συμπέρασμα. Η πλήρης επαγωγή είναι μια μαθηματική μέθοδος απόδειξης, που έχει ως θεμέλιο την επαγωγική διαδοχή των φυσικών αριθμών, νομιμοποιημένη από τα αξιώματα Peano[9].

ιστορικό σημείωμα

Είναι αξιοσημείωτο, αλλά και περίεργο για την καθυστέρηση, πως την πρώτη σαφή διατύπωση της «αρχής της αναδρομής» οφείλουμε στον Blaise Pascal, σύγχρονο και φίλο του Pierre de Fermat. Ο Pascal εξέθεσε αυτή την αρχή σε ένα του σχόλιο τιτλοφορούμενο το «Αριθμητικό τρίγωνο» στα 1645. Αργότερα πληροφορηθήκαμε πως αυτό το σχόλιο ήταν συνέπεια της αλληλογραφίας ανάμεσα στον Pascal και στον Fermat, που είχει ως αντικείμενο ένα πρόβλημα παιγνιδιού[10]. Και αξίζει να σημειώσει κανείς πως αυτή η αλληλογραφία έδωσε λαβή στη γένεση της θεωρίας των πιθανοτήτων.

Η σκέψη πως η αρχή του συλλογισμού με αναδρομή — που είναι το βασικό θεμέλιο των καθαρών μαθηματικών και της θεωρίας των πιθανοτήτων —όπως και η θεωρία των πιθανοτήτων, επινοήθηκαν από ανθρώπους που συζητούσαν πάνω στον τρόπο διανομής των κερδών, που βρίσκονταν σε εκκρεμότητα, ανάμεσα σε δύο παίκτες, δημιουργεί έκπληξη. Σύγχρονα όμως βεβαιώνει τον ισχυρισμό μας πως η πορεία των μαθηματικών και γενικότερα της επιστήμης είναι συμπτωματική και απρογραμμάτιστη, αν και το κάθε επόμενο σ' αυτή την πορεία βήμα μας οδηγεί σε κατάκτηση που αποτελεί συνέχεια της προηγούμενής της.

Η ιστορία συγκράτησε χαρακτηριστικά παραδείγματα, *που προτρέπουν* σε «επαγωγικό» συμπερασμό, αλλά που αποδείχτηκε από τα πράγματα εσφαλμένος. Συγκεκριμένα:

Το τριώνυμο: $\chi^2+\chi+41$

που εμπειρικά προσδιόρισε ο Euler (1707-1783), δίνει για τους 40 πρώτους ακεραίους: 0, 1, 2, ...39 αριθμούς πρώτους, ενώ για $\chi=40$ δίνει τον $1681=41^2$, δηλαδή αριθμό σύνθετο.

Επίσης ο ίδιος ο Euler, αναζητώντας ένα τριώνυμο με ακέραιους συντελεστές, που να μας δίνει για *κάθε* ακέραιο χ αριθμό πρώτο, προσδιόρισε το τριώνυμο

$$\chi^2+\chi+17$$

που για τους ακεραίους χ:0, 1, 2 ... 15 δίνει αριθμούς πρώτους, ενώ για $\chi=16$ δίνει τον $289=17^2$ δηλαδή αριθμό σύνθετο.

Με τα δύο αυτά παραδείγματα γίνεται φανερό, πως, τον μη μυημένο επαρκώς στη μαθηματική σκέψη, ο σημαντικός αριθμός διαπιστώσεων θα οδηγούσε σε κατάφορα λαθεμένο συμπέρασμα, αν και δεν πρέπει να μην υπομνήσουμε πως περισσότεροι από ένας φυσικοί νόμοι έγιναν παραδεκτοί με ολιγότερα δεδομένα.

Και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις δε θα ευδοκιμούσε καμιά προσπάθεια απόδειξης, πως την ιδιότητά τους— να δίνουν για $\chi=0$, 1, 2, 3, π.χ. αριθμούς πρώτους — μπορούν να την κληροδοτήσουν στις επόμενες τιμές του χ. Και αυτό, γιατί δεν μπορούμε να σημειώσουμε πως για κάποια αυθαίρετη και συγκεκριμένη τιμή του χ το ένα ή το άλλο από τα παραπάνω τριώνυμα δίνουν αριθμό πρώτο· δεν έχουμε δηλαδή έκφραση που να εκπροσωπεί μ ο ν α δ ι κ ά τον πρώτο.

Την ίδια απάντηση δίνουμε και για τα δύο άλλα ιστορικά παραδείγματα που οφείλονται στη μεγαλοφυΐα του Fermat (1601-1665).

Ο διάσημος γάλλος μαθηματικός μας έδωσε την έκφραση:

$$2^{2^\nu}+1$$

ως έκφραση που δίνει για κάθε ν πρώτο και την έκφραση:

$$\chi^\nu+\psi^\nu=z^\nu$$

η οποία δεν ικανοποιείται για ακέραιη καί θετική τριάδα τιμών των χ, ψ, z ($\chi.\psi.z\neq0$) και για ν φυσικό αριθμό και μεγαλύτερο του 2.

Το πρώτο από τα πραδείγματα Fermat, για $\nu=0$, 1, 2, 3, 4 μας δίνει αριθμούς πρώτους, ενώ, για $\nu=5$ — όπως διαπίστωσε υπολογιστικά ο Euler— μας δίνει αριθμό σύνθετο.

Στο δεύτερο παράδειγμα — που έμεινε στην ιστορία ως το τελευταίο πρόβλημα του Fermat — ενώ αποδείχτηκε η ιδιότητα, που του έδωσε ο Fermat για $\nu=3$, π.χ., κατέστη αδύνατο μέχρι σήμερα να αποδειχθεί η ιδιότητά του ως ιδιότητα κληροδοτούμενη και για τις επόμενες του 3 τιμές του ν. Προφανώς, η δυσκολία οφείλεται στο γεγονός ότι δεν υπάρχει ένας μοναδικός τρόπος έκφρασης αυτής του της ιδιότητας δηλαδή της μη ικανοποίησης της παραπάνω εξίσωσης από κάποια τριάδα ακέραιων θετικών αριθμών χ,ψ,z με χ.ψ.z≠0 και για τιμή του ν>3 αυθαίρετη και ορισμένη.

Είναι γνωστό, πως, ενώ, οι διάφοροι σοφοί στους δύο αιώνες που ακολούθησαν, βρήκαν πλήθος ακέραιες τιμές του ν για τις οποίες το πρόβλημα Fermat αληθεύει, δεν μπόρεσαν να το λύσουν στη γενική του περίπτωση.

Εντοπίζοντας — όπως βλέπει ο αναγνώστης αυτής της μελέτης — την αιτία της αποτυχίας στα προβλήματα αυτής της φύσης, παρατηρήσαμε, πως αντί να ζητάμε να δημιουργήσουμε εμπειρικά, π.χ. ένα τριώνυμο, που να μας δίνει, για κάθε ακέραιο χ αριθμό πρώτο, έπρεπε να αναζητηθεί εξαρχής — και μάλιστα από μεγαλοφυΐες όπως εκείνη του Euler —εάν είναι δυνατή η ύπαρξη τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ με α.β.γ.≠0, που να έχει αυτή την ιδιότητα.

Με τον τίτλο *«Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση πάνω στους πρώτους αριθμούς»* εκθέτουμε την αρνητική απάντηση σ' αυτό το θέμα στο τεύχος 3 —Δεκέμβριος 1955— του άλλοτε εκδιδόμενου από μας μαθηματικού περιοδικού «Η Μαθηματική αλήθεια».

Θα τελειώσουμε λοιπόν αυτή μας τη μελέτη υπογραμμίζοντας πως δεν είναι σωστό να μιλάμε για επαγωγή και μάλιστα μη πλήρη —η πλήρης είναι δυνατή μόνο στα μαθηματικά— έξω από τα μαθηματικά.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

1. Εδώ τη λέξη «σύνολο» την αναφέρουμε με τη σημασία της ομαδοποίησης στοιχείων, χωρίς να εξετάζουμε αν πρόκειται για σαφώς καθορισμένα και διακεκριμένα μεταξύ τους αντικείμενα. Την αναφέρουμε δηλαδή με την έννοια «συλλογή αντικειμένων» και όχι με την έννοια «μαθηματικό σύνολο».
2. Βλ. σελ. 89: Initiation à la théorie des ensembles, J. Breuer, Dunod 1969.
3. Βλ. σελ.23: Les grands mathématiciens, E.T. Bell, Payot, Paris 1939.
4. Ο Marcel Boll, στο βιβλίο του: Les étapes des mathématiques, σελ. 49, μας πληροφορεί, πως ο πρώτος στην Ιστορία που διατύπωσε αυτή την ιδιότητα του νου και μάλιστα για αστεϊσμό και με τη φράση: *Ό,τι έγινε μια φορά μπορεί να επαναλαμβάνεται πάντοτε,* είναι ο Ζήνων. Και κατόπιν, 24 αιώνες μετά, παρουσιάστηκε η ίδια σκέψη κάτω από την πέννα του Henri Poincaré με την διατύπωση *«Το ανθρώπινο πνεύμα θεωρεί τον ευατό του ικανό να συλλαμβάνει την απεριόριστη επανάληψη της ίδιας πράξης, μόλις η πράξη αυτή γίνει μια φορά δυνατή»* καταχωρημένη στο έργο του: La science et l'hypotèse, édition Flammarion 1968, σελ. 41.

Ο αναγνώστης πρέπει να προσέξει, πως η αναφορά μας στην παραπάνω ιδιότητα του πνεύματος έχει τρεις διαφορετικές θεωρήσεις: τη δική μας, που είναι συνεπής προς το διαλεκτικό μας πιστεύω και την ιστορική συνέπεια· του Ζήνωνα, που, όπως μπορεί κανείς να διαπιστώσει στο διάλογο του Πλάτωνα «Παρμενίδης», τη θέτει επικεφαλής των διαλογισμών του για να κτυπήσει την πολλαπλότητα των Πυθαγορείων δηλαδή τη θεώρηση απ' αυτούς των πραγμάτων ως συνόλου σημείων· και εκείνη του Poincaré, ως ιδιότητας συναφούς με την ίδια την ύπαρξη του πνεύματος και όχι ως ιδιότητας που αποκτήθηκε από το πνεύμα στη διάρκεια των δραστηριοτήτων του και εξαιτίας τους.

Ο αναγνώστης μπορεί να συμπεράνει από τις παραπάνω θεωρήσεις τον τρόπο αντιμετώπισης —στις διάφορες εποχές— της πνευματικής ανθρώπινης πορείας: Ο Ζήνων βλέπει, τη δυνατότητα της επανάληψης από το νου στο διηνεκές μιας πράξης, αναγκαίο συμπέρασμα από τη θεώρηση των πραγμάτων από τους Πυθαγορείους ως πολλαπλών οντοτήτων, και την εκλαμβάνει ως όπλο που στρέφεται ενάντια σ' αυτή τους τη θεώρηση·

Ο Poincaré τη συλλαμβάνει ως συλλογιστική αναγκαιότητα, αλλά την καταλογίζει στα απριορικά στοιχεία της νόησης· και η τρίτη άποψη, η δική μας, που τη βλέπει ως αναγκαίο επακόλουθο της οικειοποίησης από το νου της αρχής, της διαδοχής, πού και αυτή, όπως είδαμε, ήταν ένα στάδιο της διαλογικής αντιληπτικής πορείας του. Η πορεία αυτή είναι απρογραμμάτιστη και τα αποτελέσματά της συμπτωματικά, αν και κλιμακώνουν μια συνεπή ανοδική πορεία.

Το θέμα μας προσφέρεται για να δικαιολογήσει την πίστη μας.

5. Δηλαδή σχέση στην οποία ο δεσμός ανάμεσα στο υποκείμενο και στο κατηγορούμενο είναι άρρηκτος.
6. Πρόκειται για τις προτάσεις - *αξιώματα*
7. Πρόκειται για τις προτάσεις - *θεωρήματα*, που προηγούμενα αποδείχτηκαν.
8. Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβάνεται κανείς την προέλευσή της ιδιότητας του πνεύματος, που παραπάνω αναφέραμε, είναι γεγονός ότι αυτή η ιδιότητα εμπεριέχει την αναδρομική σκέψη. Γιατί, για να επαναλάβει το πνεύμα την πράξη, που πραγματοποιήθηκε προηγούμενα, του χρειάζεται να αναχθεί, να αναδράμει σ' αυτή την προυγούμενη πράξη. Έτσι, μια πρόταση, που η βεβαίωση της αλήθειας της θα απαιτούσε τη χρησιμοποίηση αυτής της ιδιότητας του πνεύματος, θα πρέπει να εξαρτιέται από τον αυθαίρετο φυσικό αριθμό ν, που οι διακεκριμένες και συγκεκριμένες τιμές: 1, 2, 3, ... ν θα απαριθμούν την ακολουθία των σταδίων αυτής της απόδειξης.
9. A_1: Τό μηδέν είναι ένας φυσικός αριθμός
   A_2: Σε κάθε φυσικό αριθμό χ αντιστοιχεί ένας άλλος μοναδικός που ονομάζεται επόμενος του χ και συμβολίζεται χ^+
   A_3: Ο επόμενος ενός φυσικού αριθμού δεν είναι ποτέ μηδέν
   A_4: Σε διακεκριμένους φυσικούς αντιστοιχούν επόμενοι διακεκριμένοι.
   A_4: Το αξίωμα αναδρομής: Έστω Α ένα μέρος των φυσικών αριθμών, που περιέχει το μηδέν και εάν περιέχει τον χ περιέχει και τον χ^+. Τότε το Α συμπίπτει με το σύνολο Ν όλων των φυσικών αριθμών.
10. Το πρόβλημα αυτό, που πραγματεύονταν οι Pascal και Fermat είναι το διάσημο πρόβλημα της ακριβοδίκαιης διανομής κερδών ανάμεσα σε παίκτες που διεκδικούν περισσότερα κέρδη. Βλ. (εδ. 11) Préparation à l'étude des probabilité Par Th. Leconte et R. Deltheil, Vuibert 1937.

ΔΡ ΔΙΟΝ. ΛΙΒΕΡΗΣ
ΕΙΔΙΚΟΣ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΚΕΜΕ