ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΕΠΙΘΕΩΡΗΣΗ, 3 (1986), 15-26

Η ΠΥΘΑΓΟΡΙΚΗ ΔΙΑΝΟΗΣΗ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΑΡΩ Κ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Στη σημερινή εποχή της μεγάλης επιστημονικής εξειδικεύσεως και της κατατμήσεως του επιστητού, η συνολική θεώρηση της εξελικτικής πορείας του ανθρωπίνου πνεύματος, από την αρχαιότητα έως σήμερα, μας βοηθεί να κατανοήσουμε καλύτερα την ανθρώπινη φύση και τον κόσμο γύρω μας. Η σημερινή ανάπτυξη της ιστορίας και φιλοσοφίας των θετικών επιστημών δείχνει ακριβώς την ανάγκη του ανθρώπου για μια αμφίδρομη διανοητική διαδικασία: εξειδίκευση-συνολική θεώρηση.

Είναι χαρακτηριστικό, ότι σ' αυτή την ιστορικοφιλοσοφική διαχρονική εξέταση των θετικών επιστημών λαμβάνουν μέρος φιλόλογοι, φιλόσοφοι, αρχαιολόγοι, μαθηματικοί, μηχανικοί, φυσικοί κλπ, προσπαθώντας να εύρουν στοιχεία που θα τους επιτρέψουν να ανασυστήσουν τη συνέχεια στην πνευματική εξέλιξη του ανθρώπου. Επειδή δε καθένας τους εξετάζει τα θέματα αυτά από τη δική του επιστημονική άποψη, έχομε ποικίλες θεωρήσεις και ερμηνείες των δεδομένων.

Για την ιστορία των μαθηματικών τα *«Στοιχεῖα»* του Ευκλείδου αποτελούν ορόσημο. Με τη σύνθεσή τους επιβάλλονται η αξιωματική θεωρία και η αυστηρή μαθηματική απόδειξη, όπως τις νοούμε σήμερα. Ο Ευκλείδης υπήρξε μέγας μαθηματικός, ο οποίος συγκέντρωσε το περιεχόμενο των «Στοιχείων», διέταξε ό,τι είχε ευρεθεί προ αυτού, και απέδειξε αυστηρώς τα θεωρήματα εκείνα, των οποίων δεν υπήρχαν τέτοιες αποδείξεις [29, τ. I, σ. 14]*. Επομένως, ένα πρόβλημα της ιστορίας των μαθηματικών είναι το να διερευνήσει και να διαπιστώσει κανείς, ποιά κεφάλαια ή θεωρήματα των «Στοιχείων» οφείλονται σε μαθηματικούς — προδρόμους του Ευκλείδου και ποιοί είναι αυτοί [1,291 κε].

Ένα άλλο πρόβλημα είναι ο χρονικός προσδιορισμός της αρχής της αποδεικτικής μεθόδου, αφού και προ του Ευκλείδου είχαν γίνει αποδείξεις θεωρημάτων, άλλες αυστηρές και άλλες όχι. Οι αρχαιότεροι μαθηματικοί, στους οποίους η παράδοση αποδίδει τις αποδείξεις κάποιων θεωρημάτων, είναι ο Θαλής ο Μιλήσιος και ο Πυθαγόρας ο Σάμιος.

Για το ευρύ κοινό, η συμβολή του Πυθαγόρου στη γεωμετρία ταυτίζεται με το πασίγνωστο «Πυθαγόρειο θεώρημα». Όμως, η ουσιαστική συμβολή του στα μαθηματικά δεν εξαντλείται σ' αυτό το θεώρημα. Ένα μεγάλο μέρος της Θεωρίας των αριθμών των αρχαίων Ελλήνων, όπως διατυπώνεται στα βιβλία VII, VIII, IX των Στοιχείων του Ευκλείδου, αποδίδεται στον Πυθαγόρα και τους μαθητές του. Ειδικά ως ανακαλύψεις του Πυθαγόρου αναφέρονται επίσης οι ασύμμετροι αριθμοί, τα κανονικά πολύεδρα και οι ιδιότητές τους, ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών παντός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες, οι ακέραιες λύσεις της εξισώσεως $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, με τους τύπους μ, $(\mu^2 + 1(/2$, $(\mu^2 - 1)/2$, όπου $\mu =$ περιττός 3, 5,...

Τα τελευταία 50 χρόνια όμως, έχει εγερθεί μεγάλη συζήτηση μεταξύ των ερευνητών της ιστορίας των μαθηματικών, σχετικά με την πρωτοτυπία του Πυθαγορείου θεωρήματος, καθώς και με τη θεμελίωση και ανάπτυξη των μαθηματικών από τους Έλληνες. Οι αμφισβητήσεις άρχισαν μετά τη διαπίστωση ότι στα αρχαία βαβυλωνιακά κείμενα υπάρχουν «Πυθαγόρεια» τρίγωνα (3, 4, 5) — δηλαδή με μήκη πλευρών 3, 4, 5, που ικανοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα — και ότι οι αιγύπτιοι αρπεδονάπτες χρησιμοποιούσαν πολύ προ του Πυθαγόρου το ίδιο τρίγωνο στις καταμετρήσεις τους. Λαμβάνοντας επί πλέον υπ' όψη τις μαρτυρίες αρχαίων συγγραφέων, ότι ο Πυθαγόρας είχε μαθητεύσει στα ιερατεία της Αιγύπτου και της Βαβυλώνος, συμπεραίνουν ότι οι Έλληνες κληρονόμησαν τα αιγυπτιακά και βαβυλωνιακά μαθηματικά.

Ο O. Neugebauer γράφει χαρακτηριστικά: «Δεν είναι πια δυνατόν να θεωρούμε τους Έλληνες ως τους πρώτους δημιουργούς και θεμελιωτές της επιστήμης. Όλο το υλικό όπου θεμελιώθηκαν τα ελληνικά μαθηματικά τόσον της Στοιχειώδους γεωμετρίας, όσον και της διδασκαλίας περί αναλογιών, όσον ακόμη και της διδασκαλίας περί ισότητος, ευρίσκεται συγκεντρωμένο στα βαβυλωνιακά μαθηματικά, είναι δε δυνατόν να συνδεθούν όλα τα σημεία χωρίς χάσμα «[18]. Ο v. d. Waerden έγραψε επίσης, ότι «η βαβυλωνιακή παράδοση προμήθευσε το υλικό, με το οποίο οι Έλληνες, και ιδίως μάλιστα οι Πυθαγόρειοι οικοδόμησαν τα μαθηματικά τους» [38, 204].

Το 1962 ο A. Seidenberg διατύπωσε την άποψη, ότι η γεωμετρία προήλθε από το θρησκευτικό τυπικό, και κατέληξε στο συμπέρασμα, ότι κύκλος και τετράγωνο ήσαν ιερά σχήματα, τα οποία μελετούσαν οι ιερείς. Αυτοί παρατήρησαν ότι το τετράγωνο της υποτεινούσης ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του. Τη γνώση αυτή εφήρμοσαν στο τυπικό των θυσιών και έτσι αυτή διατηρήθηκε για χιλιάδες χρόνια. Η αρχική επεξεργασία της έγινε πολύ προ του 2000 π.Χ.. Το 2000 π.Χ. ήταν ήδη παλαιά και μέρη της είχαν εισδύσει στην Αίγυπτο και τη Βαβυλώνα, που έγιναν η βάση μιας νέας αναπτύξεως σ' αυτά τα κέντρα. Η νέα μεγάλη ανάπτυξη ήταν η λύση της δευτεροβαθμίου εξισώσεως. Μετά χίλια και πλέον χρόνια η Ελλάς κληρονόμησε την άλγεβρα από τη Βαβυλώνα, αλλά η γεωμετρία της έχει περισσότερο ινδική παρά βαβυλωνιακή όψη. Κληρονόμησε τη γεωμετρική άλγεβρα, το πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου, το πρόβλημα της διατυπώσεως της $\sqrt{2}$ σε ρητή μορφή και κάποιες έννοιες αποδείξεως [26, 523].

Αυτή η εργασία του Seidenberg αποτελούσε κατά μέγα μέρος της πολεμική κατά της απόψεως του Neugebauer, πως «ό,τι καλείται πυθαγόρειο στην ελληνική παράδοση θα έπρεπε να λέγεται βαβυλωνιακό», όπως ο ίδιος ο Seidenberg γράφει [28, 12]. Σε άλλη πάλι εργασία του, συγκρίνοντας τα κινεζικά με τα βαβυλωνιακά μαθηματικά, ανακάλυψε κοινή ορολογία για τελείως ειδικά θέματα [27, 5 — 7], και συνεπέρανε ότι θα είχαν κοινή προέλευση, αποφεύγοντας να θεωρήσει τα μέν παράγωγα των δέ [27, 13].

Το 1983 ο van der Waerden διατύπωσε τη θεωρία του περί κοινής αρχής όλης της θεωρίας που υπεισέρχεται στο Πυθαγόρειο θεώρημα και τις πυθαγόρειες τριάδες αριθμών, που συμβολίζουν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου. Παρατηρώντας αφ' ενός ότι υπολογιστικές μέθοδοι για τα ανωτέρω χρησιμοποιούνταν στή Βαβυλώνα, Ελλάδα, Ινδία και Κίνα, και αφ' ετέρου ότι οι μεγάλες ανακαλύψεις στα μαθηματικά, τη φυσική, την αστρονομία, γίνονται μόνο μια φορά (με εξαίρεση τη σύγχρονη ανακάλυψη των μή—Ευκλειδείων γεωμετριών από τους Gauss, Bolyai, Lobatchevski), καταλήγει στο εξής: «Όταν ευρίσκουμε·ότι ένα μεγάλο και σημαντικό θεώρημα, όπως το Πυθαγόρειο, που δεν είναι εύκολο να ευρεθεί, είναι γνωστό σε διάφορες χώρες, το καλύτερο που έχουμε να κάνουμε είναι να αποδεχθούμε την υπόθεση της εξαρτήσεως» [39, 10].

Στη συνέχεια ο ίδιος λαμβάνει υπ' όψη του τα αρχαιολογικά δεδομένα για τη μεγαλιθική αρχιτεκτονική (4η — 2η χιλιετ. π.Χ.) στην Πορτογαλλία, Ισπανία, Βρεττανία, Μάλτα, Αίγυπτο, Ελλάδα. Καταλήγει δε στο ότι η ανάπτυξη της αναγκαίας τεχνικής επιδεξιότητας για τη μεγαλιθική αρχιτεκτονική έγινε μια φορά σ' ένα κέντρο, απ' όπου έκτοτε διαδόθηκε [39, 16—24]. Επί πλέον, το δεκαδικό αριθμητικό σύστημα, κοινό στους ινδοευρωπαϊκούς λαούς, αποτελούσε σημαντικό πολιτιστικό επίτευγμα και σπουδαία βάση για τη διδασκαλία της αριθμητικής και της αλγέβρας. Κοινότητα στοιχείων παρατηρείται επίσης στις θρησκείες των ινδοευρωπαϊκών λαών, που οδηγούν στο συμπέρασμα για την ύπαρξη μιας ινδοευρωπαϊκής θρησκείας [39, 35]. Έτσι συμπεραίνει, ότι θα πρέπει να υπήρξε στη νεολιθική εποχή (3000 — 2500 π. Χ.) μια μαθηματική επιστήμη στην κεντρική Ευρώπη και από εκεί να εξαπλώθηκε στη Μ. Βρεττανία, Εγγύς Ανατολή, Ινδία και Κίνα [39, XI].

Το συμπέρασμα αυτό δεν αποδέχονται οι Lam και Shen για την Κίνα, επικαλούμενοι αφ' ενός τη μεγάλη απόστασή της από την Ευρώπη και αφ' ετέρου την ακρίβεια των μαθηματικών υπολογισμών στα κινεζικά κείμενα. Θεωρούν, όμως, πιθανόν κάποιες έννοιες για τις σχέσεις των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου να ανάγωνται σε κοινή αρχή, οι οποίες να διαμορφώθηκαν αργότερα ποικιλοτρόπως σε διάφορα μέρη [14, 110 — 1].

Στην περίπτωση των ελληνικών μαθηματικών μπορούμε να επικαλεσθούμε την άποψη του A. Szabó, ότι πρέπει διαρκώς να τίθεται το ερώτημα, μέχρι ποίου σημείου η ελληνική επιστήμη αποτελεί συνέχιση των προελληνικών γνώσεων και μέχρι ποίου σημείου είναι εντελώς νέα δημιουργία [36, 251].

Η βασική διαφορά που παρατηρείται μεταξύ ελληνικών και ανατολικών μαθηματικών είναι ότι λείπει από τα δεύτερα ένα αυστηρό λογικό σύστημα, βάσει του οποίου να εξάγωνται με απόδειξη μαθηματικές προτάσεις, ξεκινώντας από κάποιες πρώτες αρχές (αξιώματα). Αυτή δε η έλλειψη δεν οφείλεται στο ότι οι γνώσεις μας ως προς αυτά είναι ατελείς [2, 157] [6]. Γι' αυτό ο Szabó γράφει ότι τα ελληνικά μαθηματικά αποτελούν ένα, με την παραγωγική μέθοδο, περίτεχνα συντεθειμένο σύστημα γνώσεων, ενώ τα παλαιά ανατολικά κείμενα μαθηματικού περιεχομένου περιέχουν μόνον ενδιαφέρουσες υποδείξεις για το πώς πρέπει να λύει κανείς ένα μαθηματικό ζήτημα [36, 254].

Ο W. Knorr αναρωτιέται τι εννοεί ο Szabó με την «παραγωγική μέθοδο», αφού πλήρως διαρθρωμένο αξιωματικό σύστημα δεν συναντάται στην προευκλείδειο εποχή. Εκτός βέβαια αν εννοεί με αυτήν μια διατεταγμένη σειρά άλλων προτάσεων, όπου το πέρασμα από δύο ή περισσότερες σε μια άλλη να γίνεται βάσει κανόνων λογικής. Τότε, όμως, τα μαθηματικά και στις αρχαιότερες ανατολικές παραδόσεις ήσαν παραγωγικά, αφού άρχιζαν με κάποια δεδομένα και μέσω μιας ακολουθίας βημάτων έδιναν κάποιο επιθυμητό συμπέρασμα [11, 147].

Οπωσδήποτε διερωτάται κανείς, γιατί πολλοί αρχαίοι συγγραφείς μας θεωρούσαν τους ανατολικούς λαούς, και ιδιαίτερα τους Αιγυπτίους, ως δασκάλους των

Ελλήνων στις μαθηματικές επιστήμες, ενώ οι έρευνες δείχνουν τη διαφορά μεταξύ ελληνικών και ανατολικών μαθηματικών.

Κατά τον Σ. Ζερβό, η σταδιακή αφαίρεση, με την έννοια της απελευθερώσεως της μορφής από το συγκεκριμένο υλικό σώμα, οδήγησε στη διαμόρφωση ενός συνόλου εμπειρικών γνώσεων, αρκετά σεβαστού ώστε να θεωρείται «γεωμετρία» ακόμη και από τους υστέρους αρχαίους Έλληνες, που δεν έκαναν σύγκριση μεταξύ των ανατολικών λαών και των ιδίων, αλλά μεταξύ του πρωταρχικού «αφηρημένου» σταδίου και του προηγηθέντος χάους στις αντιλήψεις [41, 409].

Ποιός ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε την απόδειξη στα μαθηματικά, δεν γνωρίζουμε. Κατά τον Εύδημο τον Ρόδιο *«τό μέν οὖν διχοτομεῖσθαι τόν κύκλον ὑπό τῆς διαμέτρου πρῶτον Θαλῆν ἐκεῖνον ἀποδεῖξαί φασιν»*, όπως αναφέρει ο Πρόκλος. Μεταξύ των θεωρημάτων που απέδειξε ο Θαλής είναι και οι ιδιότητες των ομοίων τριγώνων (που στηρίζονται στη θεωρία των αναλογιών), τις οποίες χρησιμοποίησε για τον υπολογισμό του ύψους πυραμίδος από το μήκος της σκιάς της και το μήκος της σκιάς γνωστού γνώμονος κατά την ίδια ώρα, προκαλώντας την έκπληξη του Φαραώ Άμασι [Διογ. Λαέρτιος, Πλουτ. Συμποσ. προβλ.]. Η έκπληξη του Φαραώ μπορεί να ερμηνευθεί ίσως ως αποτέλεσμα της αγνοίας τόσον αυτού, όσον και του αιγυπτιακού ιερατείου σχετικά με τη θεωρία των αναλογιών.

Μπορεί βέβαια ο Θαλής να μην ήταν ο πρώτος Έλληνας που χρησιμοποίσε την αποδεικτική μέθοδο. Αυτά όμως αποτελούν κάποια μαρτυρία σχετικά με το μεγάλο βήμα που είχαν κάνει οι Έλληνες, τη γένεση της θεωρητικής γεωμετρίας. Ο Σ. Ζερβός, λαμβάνοντας υπ' όψη την ιδέα του Smith σχετικά με μια πιθανή επίδραση της γεωμετρικής διακοσμήσεως στη μελέτη της γεωμετρίας ως επιστήμης, καθώς και τη μαρτυρία του Ηροδότου (*δοκέει δέ μοι ἐντεῦθεν* (ἐξ Αἰγύπτου) *γεωμετρίη εὑρεθεῖσα εἰς τήν Ἑλλάδα ἐπανελθεῖν* [Β. 109]), εκφράζει την άποψη ότι η αρχαία ελληνική αγγειογραφία επέδρασε στη γένεση της θεωητικής γεωμετρίας ως εξής: Η ανάμνηση των γεωμετρικών γραμμών πέρασε στο υποσυνείδητο και θεωρήθηκε αργότερα ως έμφυτη. Έτσι ο Θαλής μεταμόρφωσε τις μαθηματικές γνώσεις, που απεκόμισε από τα ταξίδια του, με τα φιλοσοφικά του οράματα που στηρίζονταν σ' ένα ενστικτωδώς ωριμασμένο από τη γεωμετρική τέχνη υπόβαθρο αντιλήψεων. Αυτή ήταν η αρχή της νέας ελληνικής γεωμετρίας [41· 408, 412].

Αυτά μπορεί να ίσχυσαν και για άλλους αρχαίους σοφούς που πλούτισαν τις γνώσεις τους ταξιδεύοντας στην Αίγυπτο και στην Ανατολή. Ένας από αυτούς υπήρξε και ο Πυθαγόρας, που στην αρχαία παράδοση φέρεται ως μαθητής του Θαλή.

Ο Πρόκλος αναφέρει για τον Πυθαγόρα, ότι *«τήν περί αὐτήν* (γεωμετρίαν) *φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τάς ἀρχάς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καί ἀΰλως καί νοερῶς τά θεωρήματα διερευνώμενος, ὅς δή καί τήν τῶν ἀλόγων πραγματείαν καί τήν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν»* [Σχόλ. εἰς Στοιχ. Εὐκλείδου· 30, Β' 137].

Η σπουδαιότητα της διατυπώσεως και αποδείξεως του Πυθαγορείου θεωρήματος δεν σχετίζεται με τα συγκεκριμένα πυθαγόρεια τρίγωνα των αιγυπτιακών και ανατολικών πρακτικών μαθηματικών. Γιατί διαφέρει η πρακτική χρησιμοποίηση μιας ειδικής περιπτώσεως από τη γενική διατύπωση και λογική παραγωγική απόδειξη της αρχής που διέπει την ειδική αυτή περίπτωση. Δεν ενδιαφέρει το αν ο Πυθαγόρας έκανε ή όχι κάποιες εμπειρικές δοκιμές, προτού διατυπώσει το θεώρημά του. Η ουσία της μεγαλοφυούς ιδέας του έγκειται στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη του θεωρήματός του, στην οποία δεν υπεισέρχεται συγκεκριμένος αριθμός ή μετρικό σύστημα μήκους ή εμβαδού. Κατά τον O. Onicescu ο Πυθαγόρας διατύπωσε ένα αληθινό θεώρημα, το πρώτο όπου δεν περιπλέκονταν άμεσα οι αριθμοί και που δεν εμπλεκόταν στη συζήτηση για τους ασυμμέτρους. Γιατί αφού απέδειξε το θεώρημά του ο Πυθαγόρας, και ενώ προσπαθούσε να το εκφράσει αριθμητικά ως $\alpha^2+\beta^2\gamma^2$, μεταξύ ακεραίων αριθμών α, β, γ, ανακάλυψε την αδυναμία να ισχύει πάντοτε γι' αυτούς η ανωτέρω σχέση [20].

Ας έλθουμε τώρα στη δεύτερη μεγάλη ανακάλυψη του Πυθαγόρου, τους ασυμμέτρους αριθμούς. Στα Στοιχεία του Ευκλείδου αναφέρεται ότι *«σύμμετρα μεγέθη λέγεται τά τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδέν ἐνδέχεται κοινόν μέτρον γενέσθαι»* [ορ. 1, βιβλ. X]. (Το μέτρο αυτό είναι αφηρημένο και γενικό, εκφράζεται δε ως αυστηρή θεωρητική μαθηματική σχέση μεταξύ των δύο μεγεθών).

Ας δούμε τώρα, πώς το Πυθαγόρειο θεώρημα οδηγεί στην ύπαρξη των ασυμμέτρων. Επειδή κάθε τετράγωνο χωρίζεται από τη διαγώνιό του σε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα με κοινήν υποτείνουσα τη διαγώνιο του τετραγώνου, το Πυθαγόρειο θεώρημα εφαρμόζεται μεταξύ της πλευράς α και της διαγωνίου δ κάθε τετραγώνου, δηλαδή $\delta^2=2\alpha^2$. Στη σημερινή εποχή απλουστεύουμε αυτή τη σχέση σε $\delta=\alpha\sqrt{2}$, χωρίς να μας κάνει ιδιαίτερη εντύπωση η $\sqrt{2}$. Με τον ίδιο τρόπο γράφουμε γενικώς $\delta=\alpha\sqrt{\lambda}$, όπου ο αριθμός λ δεν είναι τέλειο τετράγωνο κανενός αριθμού. Αυτή, όμως, η σχέση ήταν «άρρητη» στην αρχαιότητα — προκειμένου περί αριθμών — αφού ήταν αδύνατον να εκφρασθεί η τιμή της αριθμητικώς. Αντίθετα, υπήρχε τρόπος να την περιγράψουν στη γεωμετρία.

Ο Αριστοτέλης γράφει, πως απορεί κανείς για την ασυμμετρία της διαγωνίου του τετραγώνου ως προς την πλευρά του, αφού αρχικά διερωτάται πώς είναι δυνατόν να υπάρχει κάτι που να μη μπορεί να μετρηθεί ούτε με το ελάχιστο έστω κοινό μέτρο. Τελικά όμως, μετά την κατάλληλη διδασκαλία σχετικά με αυτό, το πράγμα του παρουσιάζεται διαφορετικά. Γιατί ο γεωμετρικά εκπαιδευμένος νους, μόλις ιδεί ότι αμέσως μπορεί να μετρηθεί η διαγώνιος, δεν απορεί πια καθόλου [Μεταφυσικά Α 2983 α 13 και εξής].

Ο τρόπος με τον οποίο ελέγχεται η ασυμμετρία δύο μεγεθών δεν μπορεί να είναι εμπειρικός. Γιατί στην πράξη υπάρχουν κάποια όρια στη δυνατότητα ελέγχου, κατά πόσον δύο μεγέθη μπορούν να μετρηθούν με το ίδιο μέτρο. Αρκεί να λάβει κανείς μια αρκετά μικρή μονάδα, ώστε τελικά να μη μπορεί να διακρίνει εύκολα το κλάσμα της. Στη θεωρία όμως τα πράγματα είναι διαφορετικά και αποδεικνύεται γενικά αν κάτι είναι σύμμετρο ή ασύμμετρο μέγεθος, ανεξάρτητα από τη μονάδα μετρήσεως.

Στην αρχαιότητα ήταν γνωστό, ότι η διαγώνιος του τετραγώνου είναι ασύμμετρο μέγεθος ως προς την πλευρά του. Η αρχαιότερη απόδειξη βασίζεται στην Πυθαγόρειο διδασκαλία περί αρτίων και περιττών αριθμών, όπως φαίνεται από τη μνεία του Αριστοτέλους, ότι σε εναντία περίπτωση «οι περιττοί αριθμοί θα ήσαν ίσοι προς τους αρτίους» [Αναλ. πρότ. Ι 23, 41 α 26· Ι 44, 50 α 37]. Η απόδειξη περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδου [τελική πρόταση X βιβλίου], επειδή δε είναι τελείως θεωρητική ο Szabó συμπεραίνει, ότι «τα αρχαία μαθηματικά με την ανακάλυψη της γραμμικής ασυμμετρίας έφθασαν σε μια νέα αποδεικτική μέθοδο και σε μια αντιεμπειρική και αντιπαραστατική στροφή» [36, 296].

Προφανώς ο Szabó εννοεί, ότι η απόδειξη μπορούσε να γίνει τελείως θεωρητικά, μόνο με αναφορά στα προτιθέμενα αξιώματα, χωρίς τη χρήση σχεδίων. Ο Knorr πάντως θεωρεί, ότι τα δεδομένα που έχουμε δεν επιτρέπουν να αποδίδωμε στους μαθηματικούς του Ε΄ αι. π.Χ. προσπάθειες αξιωματικοποιήσεως τομέων της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Σημεία τέτοιου ενδιαφέροντος πρωτοεμφανίζονται με τον Θεόδωρο στις αρχές του Δ΄ αι. π.Χ. [11· 148, 157].

Ο V. Brunn θεωρεί ότι η ασυμμετρία είχε ήδη γίνει αντιληπτή από τους Αιγυπτίους, στηριζόμενος στον διάλογο των «Νόμων» [819 a — 820 b] του Πλάτωνος, αναγνωρίζει όμως τις τεράστιες λογικές δυσκολίες που υπερπήδησαν τελικά οι Έλληνες λόγω αυτής της ανακαλύψεως [3· 28, 30]. Στην άποψη αυτή ο Σ. Ζερβός αντιπαραθέτει το εξής ερώτημα: Αν υποθέσουμε ότι οι Αιγύπτιοι γνώριζαν την ασυμμετρία, τότε θα έπρεπε να ήξεραν την ύπαρξη ασυμμέτρων μηκών· αλλά τότε πώς μπόρεσε ο κατά αιγυπτιακό τρόπο μορφωμένος Πυθαγόρας να διατυπώσει μιά κοσμολογία, όπου όλα τα μήκη είχαν υποτεθεί σύμμετρα, και που γι' αυτό αντιμετώπισε μια κρίση στη θεμελίωση, μετά την ανακάλυψη του θεωρήματός του; [41, 451].

Ας δούμε τώρα πώς μπορούσε να εκφρασθεί η διαγώνιος του τετραγώνου στη γεωμετρία. Σ' ένα εδάφιο του Πλάτωνος γίνεται λόγος για ρητή και άρρητο διαγώνιο, και μάλιστα την ίδια: *«έκατόν μέν ἀριθμῶν ἀπό διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνός ἑκάστων, ἀρρήτων δέ δυοῖν»* [Πολιτεία VIII 546 C 4—5].

Η έννοια αυτού του χωρίου ερμηνεύεται από τις εξής δύο εξισώσεις:
$100.(7^2-1)=100.48=4800$ και $100.(50-2)=100.48=4800$

Στην πρώτη περίπτωση, η διαγώνιος του τετραγώνου πλευράς 5 χαρακτηρίζεται ως «ρητή», μήκους 7 μονάδων. υτό σημαίνει, κατά τον Szabó, ότι η έκφραση «ρητή διαγώνιος» είναι ένας ελληνικός όρος για την κατά προσέγγιση τιμή του μήκους της διαγωνίου, αφού $\sqrt{50}\approx 7$. Στη δεύτερη περίπτωση, η ίδια διαγώνιος καλείται «άρρητος», επειδή έχει μήκος $\sqrt{50}$. Γενικώς, όμως, οι αρχαίοι αντί να μετρούν το μήκος της αρρήτου διαγωνίου, χρησιμοποιώντας κάποιο σύμβολο για την τετραγωνική ρίζα, προτιμούσαν να αναφέρωνται στη (ρητή) τιμή του τετραγώνου, που έχει την άρρητο διαγώνιο ως πλευρά. Δηλαδή μετρούσαν τη διαγώνιο «κατά το τετράγωνό της», όπως φαίνεται και από τη μαθηματική περικοπή του Πλατωνικού «Θεαιτήτου» [147 C — 148 D], την οποία εξετάζει διεξοδικά ο Szabó [36, 60 — 130].

Ο ανωτέρω τρόπος δεν εμπόδισε τους Πυθαγορείους να επεξεργασθούν μια επιστημονική μέθοδο προσεγγίσεως της τιμής της $\sqrt{2}$, δηλαδή το σύστημα των αλληλοδιαδεχομένων «πλευρικών και διαμετρικών αριθμών», που καθορίζονται ως εξής: *«Ἡ μέν διάμετρος προσλαβοῦσα τήν πλευράν, ἧς ἐστιν διάμετρος, γίνεται πλευρά, ἡ δέ πλευρά ἑαυτῇ συντεθεῖσα καί προσλαβοῦσα τήν διάμετρον τήν ἑαυτῆς γίνεται διάμετρος»* [Πρόκλου εἰς Πλάτων. Πολιτ. II 27].

Κατά τον Θέωνα τον Σμυρναίο η μονάς είναι η απαρχή όλων των αριθμών, τόσο των πλευρικών, όσο και των διαμετρικών [Expos. rerum math. ad leg. Platonem, ed. Hiller, p. 43 — 44]. Έχουμε λοιπόν τους εξής τύπους σχηματισμού αυτών των αριθμών [29, Β΄9]:

$$\alpha_{\eta+1} = \alpha_\eta + \delta_\eta \quad \text{και} \quad \delta_{\eta+1} = 2\alpha_\eta + \delta_\eta$$

όπου α_η και δ_η πλευρικός και διαμετρικός αριθμός αντιστοίχως. Έτσι σχηματίζεται μια ακολουθία τετραγώνων, όπου τα τετράγωνα των διαγωνίων διαφέρουν κατά μονάδα από το διπλάσιο του τετραγώνου της πλευράς και μάλιστα εναλλάξ καθ' υπεροχή και κατ' έλλειψη.

τετράγωνο	α	δ	$\delta_\eta^2 - 2\alpha_\eta^2$	δ/α	δεκαδική τιμή
I	1	1	+1	1/1	1
II	2	3	−1	3/2	1,5000000
III	5	7	+1	7/5	1,4000000
IV	12	17	−1	17/12	1,4166666
V	29	41	+1	41/29	1,4137931
VI	70	99	−1	99/70	1,4142857

Από τον πίνακα φαίνεται, ότι οι λόγοι δ/α μας δίνουν διαδοχικές προσεγγιστικές τιμές της $\sqrt{2}$. Μάλιστα οι λόγοι δ/α των περιττής τάξεως τετραγώνων προσεγγίζουν την τιμή της $\sqrt{2}$ από μικρότερές της ολοένα αυξανόμενες τιμές, ενώ των αρτίας τάξεως από μεγαλύτερές της διαρκώς ελαττούμενες τιμές, χωρίς ποτέ να τη φθάνουν.

Στην αρχαιότητα αγνοούσαν τους δεκαδικούς, όχι όμως και την περιοδική άλυση κλασμάτων, αφού στη θεωρία της μουσικής υπήρχαν σημαντικοί κλασματικοί αριθμοί, το ημιόλιον, το επίτριτον, το επίγδοον κλπ. [36,284]. Οι λόγοι δ/α παρίστανται ω εξής στην άλυση κλασμάτων:

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \qquad \frac{7}{5} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \qquad \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \qquad \text{κλπ.}$$

Ο Szabó θεωρεί, ότι αυτή η διαδικασία είναι επακόλουθο μιας αρκετά ανεπτυγμένης θεωρίας, και θα έγινε σε εποχή που η ασυμμετρία είχε αποδειχθεί με θεωρητικό τρόπο. Γι' αυτό επιμένει, ότι αυτή η μέθοδος μπορεί να ισχύει μόνον ως θεωρητικό κριτήριο της ασυμμετρίας δύο μεγεθών [36, 286].

Δεν πρόκειται να επεκταθώ περισσότερο σ' αυτή τη σύντομη παρουσίαση ενός μικρού μέρους των μαθηματικών του Πυθαγόρου. Θεωρώ, όμως, επιβεβλημένη μια επάνοδο στις απόψεις, ότι οι Έλληνες παρέλαβαν τα ινδικά ή βαβυλωνιακά μαθηματικά.

Κατά τον Szabó, «οι Έλληνες ουδεμία απολύτως βαβυλωνιακή άλγεβρα παρέλαβαν στην προευκλείδειο εποχή. Η καλουμένη γεωμετρική άλγεβρα — ορθότερον η επιπεδομετρία των Πυθαγορείων — ήταν μια τελείως νέα και πρωτότυπη δημιουργία του ελληνικού πνεύματος» [36, 10].

Ο v. d. Waerden πάλι ισχυρίζεται ότι οι Έλληνες συνεδύασαν δύο παραδόσεις χρονολογούμενες από τη νεολιθική εποχή. Η μιά είναι της διδασκαλίας των μαθηματικών μέσω προβλημάτων με αριθμητικές λύσεις, την οποία παρέλαβαν μέσω των Βαβυλωνίων. Η άλλη είναι των γεωμετρικών κατασκευών και αποδείξεων, την οποία παρέλαβαν πιθανώς μέσω των Αιγυπτίων. Σ' αυτή την τελευταία ρόλο έπαιξαν ίσως και οι Κρήτες, αφού ο Μίνως ζήτησε τον «διπλασιασμό του κύβου» [39, 89]. (Στην ινδική παράδοση ζητείται διπλασιασμός του εμβαδού του κύβου, ενώ στην ελληνική παράδοση ζητείται διπλασιασμός του όγκου του [39, 11]). Γενικά δέχεται, ότι οι Έλληνες είχαν κάποτε γνώση αυτής της επιστήμης της νεολιθικής εποχής, τη μεταμόρφωσαν όμως τελείως, δημιουργώντας μια παραγωγική επιστήμη βασιζομένη σε ορισμούς, αξιώματα, αιτήματα [39, XI]. Καταλήγει δε ότι ο Πλάτων δικαίως γράφει *«ὅ,τι περ ἂν Ἕλληνες βαρβάρων παραλάβωσι, κάλλιον τοῦτο εἰς τέλος ἀπεργάζονται»* ['Επινομίς 987 d] [39, 89].

Επανερχόμεθα λοιπόν στο πρόβλημα από πού ξεκίνησε η αξιωματική μέθοδος των Ελλήνων. Ο Seidenberg θεωρεί, ότι η γεωμετρία αναπτύχθηκε από θεολογικές ανάγκες, και ότι τα μεγάλα προβλήματα της αρχαιότητος είναι προβλήματα τυπικού που έχουν σχέση με την θεολογία [26]. Ο Whitrow αποδέχεται αυτή την άποψη, γι' αυτό αναφέρεται στη μυθική προέλευση της Ευκλειδείου γεωμετρίας [35, 16-7]. Κατά τον K. Popper πάλι, σημαντικήν ώθηση στην ελληνική γεωμετρία έδωσε η ανακάλυψη των ασυμμέτρων, που κλόνισε την πυθαγόρειο εικόνα του κόσμου κατά το σύστημα των ακεραίων αριθμών. Γι' αυτό θεωρεί ότι η Ευκλείδειος γεωμετρία είναι μια κοσμολογική πραγματεία και όχι ένα απλό μαθηματικό σύγγραμμα. Με αυτό το πνεύμα κρίνει, ότι η άποψη του Szabó, ότι η αξιωματική μέθοδος του Ευκλείδου προέρχεται από την Ελεατική διαλεκτική, αποτελεί μερική περίπτωση της δικής του [35, 18—20]. Ο Szabó δεν δέχεται τον ισχυρισμό του Popper, αλλ' ότι η εξέλιξη της Ευκλειδείου μεθόδου μπορεί να είχε συνδεθεί στενά με την πολύ αρχαιότερη ελληνική κοσμολογία. Συμφωνεί όμως με τον Whitrow, τονίζοντας ότι στην αρχή τα ελληνικά μαθηματικά — όχι μόνον κατά τους Πυθαγορείους, αλλά και κατά τον Πλάτωνα — ανήκαν στη σφαίρα της θεολογίας, αφού δεν αναφέρονται στον μεταβαλλόμενο κόσμο μας, αλλά σε κάτι που είναι αμετάβλητο και αιώνιο· τα δε αντικείμενα των μαθηματικών, ως αμετάβλητα και αιώνια, ανήκουν στη σφαίρα του θείου [35, 20—21].

Την άποψη, ότι η ελληνική μυθολογία επέδρασε στη διαμόρφωση της αξιωματικής μεθόδου των αρχαίων Ελλήνων, έχει διατυπώσει και ο Σ. Ζερβός [41, 414]. Μια ακόμη άποψη, ότι η ελληνική μυθολογία μπορεί να θεωρηθεί ως αξιωματικό σύστημα ως προς τη δομή της, εξέθεσε η γράφουσα. Συγκεκριμένα, επειδή η διαδικασία συγκροτήσεως ενιαίου μυθολογικού συστήματος προϋποθέτει την εφαρμογή μιας λογικής, και επειδή το μυθολογικό σύστημα ως σύνολο μορφών—αρχετύπων δείχνει τη μετάβαση της σκέψεως από τον υλικό στον ιδεατό κόσμο, μπορούμε να θεωρήσουμε τα δύο αυτά στοιχεία ως βασικούς σταθμούς στην εξέλιξη του ελληνικού πνεύματος [22, 220—6].

Τελείως διαφορετική είναι η άποψη του W. Knorr, ο οποίος διαφωνεί με τον Szabó, σχετικά με τις απαρχές της αξιωματικής μεθόδου. Θεωρεί ότι αυτές θα έπρεπε να αναζητηθούν στις πολιτικές, οικονομικές και κοινωνικές συνθήκες του ΣΤ' και Ε' αι. π.Χ. στην Ελλάδα. Τότε το εν γένει κλίμα ήταν υπερβολικά κριτικό (Ελεάτες, σοφιστές, σκεπτικιστές) και προσέφερε το πεδίο για συζήτηση σχετικά με το τί είναι αληθές, τί ψευδές, πώς μπορούμε να τα διακρίνουμε μεταξύ τους. Έτσι άρχισε η κριτική εξέταση των αριθμητικών και γεωμετρικών μεθόδων που ωδήγησε στην κατάταξη των μαθηματικών γνώσεων σε συναφείς τομείς και τέλος στη σύνταξη κάποιων προευκλειδείων «Στοιχείων». Επί πλέον, βάσει των επιστημολογικών απόψεων του Πλάτωνος και του Αριστοτέλους ο Knorr συμπεραίνει, ότι η επίδραση των μαθηματικών στη φιλοσοφία υπήρξε πολύ πιο σημαντική από οποιαδήποτε επίδραση γενομένη κατά την αντίθετη κατεύθυνση [11, 178-9].

Έχοντας όλα αυτά υπ' όψη, θα ήθελα να εκφράσω κάποιες σκέψεις μου σχετικά με τα πρώιμα μαθηματικά, όπου στηρίχθηκε ο Πυθαγόρας. Και αμέσως θέτω το ερώτημα, γιατί οι ερευνητές παραπέμπουν μόνο στις πηγές που εμφανίζουν τους Έλληνες να παραλαμβάνουν τις μαθηματικές γνώσεις τους από τους βαρβάρους, ενώ υπάρχουν και άλλες πηγές — εξ ίσου προσιτές — που παρουσιάζουν κάπως διαφορετικά τα πράγματα;

Εκτός από τη λατρεία των Ολυμπίων θεών υπήρχε και η ορφικοδιονυσιακή λατρεία. Ο ιδρυτής της, ο Ορφεύς, θεωρείτο ανυπέρβλητος στη μουσική και αναφέρεται ως «ὁ θεολόγος» από τον Πλάτωνα και άλλους συγγραφείς. Κατά τον Συριανό οι Πυθαγόρειοι παρέλαβαν από τον Ορφέα τις θεολογικές αρχές των νοητών και νοερών αριθμών [Εἰς Αριστοτ. Μεταφ. Μ 6, 1080 b 16] [10, Fr 317]. Ο Ιάμβλιχος πάλι διασώζει απόσπασμα του Πυθαγορικού Ιερού λόγου, τον οποίο έμαθε ο Πυθαγόρας όταν μυήθηκε στα Λείβηθρα της Θράκης σύμφωνα με την ορφική διδασκαλία που έλεγε *«τάν ἀριθμῶ οὐσίαν ἀίδιον εἶναι μέν ἀρχάν προμαθεστάταν τῶ παντός ὠρανῶ καί γᾶς καί τᾶς μεταξύ φύσιος, ἔτι δέ καί θείων καί θεῶν καί δαιμόνων διαμονᾶς ῥίζαν»* (ότι η ουσία του αριθμού είναι αιώνιος αρχή προνοούσα για ολόκληρο τον ουρανό και τη γη και τη μεταξύ τους φύση, επί πλέον δε και ρίζα της υπάρξεως και των θείων και των θεών και των δαιμόνων) [Βίος Πυθαγορ. 146—7] [10, Τ 249]. Γι' αυτό ο Πρόκλος γράφει, ότι όλη η θεολογία των Ελλήνων είναι απόγονος της ορφικής μυσταγωγίας, καθώς πρώτος μεν ο Πυθαγόρας διδάχθηκε τα σχετικά με τους θεούς όργια από τον Αγλαόφημο, δεύτερος δε ο Πλάτων παρέλαβε ολόκληρη την επιστήμη γι' αυτά και από τα πυθαγόρεια και από τα ορφικά συγγράμματα [Θεολ. Πλατων. Ι 6] [10, Τ 250].

Επομένως, σύμφωνα με τις μαρτυρίες αυτές, αριθμητική και θεολογία συνυπάρχουν ήδη στην ορφική λατρεία, από την οποία παρέλαβε πολλά στοιχεία ο Πυθαγόρας. Από τα σωζόμενα [21, 90—9], αναφέρω μόνον τα σχετικά με τη δεκάδα. Ο Συριανός διασώζει το εξής απόσπασμα του ορφικού ύμνου στον αριθμό [Εἰς 'Αριστοτ. Μεταφυσ. Μ 4, 1078 b 12] [10, Fr 315]:

«μουνάδος ἐκ κευθμῶνος ἀκηράτου, ἔστ' ἄν ἵκηται
τετράδ' ἐπί ζαθέην, ἥ δή τέκε μητέρα πάντων
πανδεχέα, πρέσβειραν, ὅρον περί πᾶσι τεθεῖσαν,
ἄτροπον ἀκαμάτην· δεκάδα κλείουσί μιν ἁγνήν
ἀθάνατοί τε θεοί καί γηγενέες ἄνθρωποι»
(Από το άδυτο της αμίαντης μονάδος μπορεί κανείς να φθάσει
στην πανίερη τετράδα, η οποία γέννησε τη μητέρα των πάντων
που δέχεται τα πάντα, τη σεβαστή που έθεσε όρια περί τα πάντα
την αμετάτρεπτη και ακαταπόνητη· δεκάδα ιερή αποκαλούν αυτή
και οι αθάνατοι θεοί και οι γεννημένοι στη γη άνθρωποι)

Η σχέση της δεκάδας με την τετράδα φαίνεται από το ότι ο αριθμός δέκα λεγόταν *«τετρόμματος καί τετραπρόσωπος»* [Ἑρμείας εἰς Πλάτ. Φαῖδρον 244 α] [10, Fr 76], που θυμίζει το *«τετραυγέα τετρακέρατον»* [Πρόκλου εἰς Πλάτ. Πολιτ. II 169] [10, Fr 77], που λεγόταν για τον ορφικό θεό Φάνητα, με του οποίου το όνομα συμβολιζόταν πολλές φορές η δεκάς [Ἰαμβλιχ. Θεολ. Ἀριθμ. IX 60] [10, Fr 315]. Ο τρόπος με τον οποίο προκύπτει η δεκάδα από την τετράδα είναι το άθροισμα 1+2+3+4=10, η ιερή τετρακτύς των Πυθαγορείων, η οποία φαίνεται να είχε ορφική προέλευση.

Έρχομαι τώρα στον μουσικό Ορφέα. Οι αρχαίοι Έλληνες εκτιμούσαν πολύ τη μουσική, τη γνώση της οποίας δικαίως θεωρούσαν ως αναπόσπαστο μέρος της παιδείας τους, αφού η μουσική συνδέεται με τα μαθηματικά ως εφαρμογή μαθηματικών αναλογιών. Φαίνεται, όμως, ότι και τα μαθηματικά οφείλουν πολλά στη μουσική, κατά την άποψη του Szabó, ο οποίος εξήτασε λεπτομερώς το πώς η αρχαία μουσική ωδήγησε στην εξέλιξη των μαθηματικών και η ορολογία της υπεισήλθε στη δική τους [36, 155—205].

Είναι γνωστά τα πειράματα του Πυθαγόρου και των μαθητών του πάνω στο μονόχορδο και η *«Κατατομή κανόνος»* του Ευκλείδου, όπου συνοψίζονται οι μέχρι την εποή του γνώσεις των Ελλήνων στη θεωρία της μουσικής. Τίθεται, όμως, το ερώτημα, μήπως η συνειδητή προσπάθεια μελέτης των ιδιοτήτων των ήχων ξεκινά από πολύ αρχαιότερη εποχή.

Στον ορφικό ύμνο του ο Απόλλων παρουσιάζεται να συναρμόζει στην κιθάρα του τις όψεις της ουρανίου σφαίρας, άλλοτε μεν βαίνοντας στα τέρματα της νεάτης χορδής, άλλοτε κρούοντας την υπάτη χορδή και άλλοτε τη μέση χορδή, χωρώντας διαδοχικά και κατά τάξη. Τη συναρμογή αυτή κάνει έχοντας προσμίξει μέσα στο έτος ίσα μέρη χειμώνος και θέρους, και αντιστοιχώντας στους ήχους της υπάτης χορδής τον χειμώνα, στους ήχους της νεάτης χορδής το θέρος, και στους ήχους της μέσης χορδής την άνοιξη [33· Υμν. 33 (16—23)]. Την αντιστοιχία εποχών και ήχων προερχομένων από την ελεύθερη ή κατά διάστημα κρούση των τριών χορδών έχει εξετάσει ο Κ. Χασάπης, ο οποίος υπελόγισε ότι η ισότητα χειμώνος και θέρους, που αναφέρεται στον ανωτέρω ύμνο, ίσχυε το 1366 π.Χ. [40· 45—47, 75—76].

Διερωτώμαι, λοιπόν, κατά πόσον ο τρόπος αναπαραστάσεως σε μουσική γλώσσα της φαινομένης ετήσιας κινήσεως του ηλίου στον ουρανό, προϋπέθετε συνειδητή μελέτη των ιδιοτήτων του μονοχόρδου από τον Ορφέα και τους μαθητές του, και πιθανόν κάποιες γνώσεις μαθηματικών.

Θέτω τώρα το δεύτερο ερώτημα: Αν πράγματι ισχύει η θεωρία του van der Waerden, ότι υπήρξε στη νεολιθική εποχή μια μαθηματική επιστήμη στην κεντρική Ευρώπη, απ' όπου εξαπλώθηκε στην υπόλοιπη Ευρώπη και την Ασία [39, XI], γιατί πρέπει να δεχθούμε ότι οι Έλληνες παρέλαβαν μέσω των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων τις δύο παραδόσεις που χρονολογούνται από αυτή την εποχή [39, 89]; Δεν θα ήταν λογικό να σκεφθούμε, ότι οι φορείς των ινδοευρωπαϊκών στοιχείων στη χώρα μας έφεραν μαζί τους όλες τους τις παραδόσεις (θρησκεία, γλώσσα, «επιστημονικές» και τεχνικές γνώσεις), οι οποίες έκτοτε εξελίχθηκαν και μορφοποιήθηκαν τελικά υπό την επίδραση όλων των νέων παραγόντων (περιβαλλοντικών, πολιτικών, κοινωνικών) μέσα στον ελλαδικό χώρο; Το ίδιο θα συνέβη και στις άλλες περιοχές. Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να αποδώσουμε τα κοινά σημεία μεταξύ ινδικών ή βαβυλωνιακών μαθηματικών και ελληνικών μαθηματικών στην κοινή προέλευσή τους, χωρίς να αποκλείουμε πολύ μεταγενέστερες ανταλλαγές, που οφείλονταν πλέον στην επικοινωνία των λαών και τη διαφοροποίηση και εξέλιξη που υπέστησαν τα πρωταρχικά κοινά στοιχεία στις διάφορες χώρες.

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

* Γενικώς στις εντός αγκυλών παραπομπές προηγείται ο αύξων αριθμός του βιβλίου στον κατωτέρω κατάλογο και έπεται ο αριθμός της σελίδος του βιβλίου. Αν το έργο είναι πολύτομο, παρεμβάλλεται ο αριθμός του τόμου. Στην περίπτωση των αρχαίων κειμένων παραπομπή γίνεται στο αναφερόμενο εδάφιο. Ειδικώς για τα Ορφικά αποσπάσματα, ο δεύτερος αριθμός δηλώνει τον αύξοντα αριθμό του αποσπάσματος (Fr) ή της μαρτυρίας (T).

[1]. Artmann B., «Über voreuklidische «Elemente», deren Autor Proportionen vermied», *Archive for History of Exact Sciences,* Vol. 33, No 4 (9.VIII.1985), 291-306).

[2]. Becker O., «Frügriechische Mathematik und Musiklehre», *Archiv für Musikwissenschaft,* 14 (1957).

[3]. Brunn V., «A quelle époque a-t-on observé pour la première fois les rapports irrationnels?», *XIIe Congrès International d'Histoire des Sciences,* Paris 1968.

[4]. Diels - Kranz, *Die Fragmente der Vorsokratiker,* Weidmann, Berlin 1960-1, I-III.

[5]. Dorrie H., «Pythagoras von Samos», *Der kleine Pauly,* Bd 4, 1264-69.

[6]. Fritz, K. V., «Die ἀρχαί in der griechischen Mathematik», *Archiv für Begriffsgeschichte,* 1 (1955), 13-103.

[7]. Fritz, K. V., «Pythagoras of Samos», *Dic. Sci. Biog.,* Vol. XI, 219-225.

[8]. *Greek Mathematical Works,* trans. Ivor Thomas, Loeb Clas. Library, Heinemann, London 1980, I-II.

[9]. Heath Th., *A History of Greek Mathematics,* 1921, Dover, N. York 1981, I-II.

[10]. Kern O., *Orphicorum Fragmenta,* Weidmann, Berlin 1922.

[11]. Knorr, W.R., «On the early History of Axiomatics: The Interaction of Mathematics and Philosophy in Greek Antiquity», J. Hintikka, D. Gruender, E. Agazzi (eds), *Pisa Conference Proceed.,* Reidel 1980, Vol. I, 145-186.

[12]. Knorr, W. R., «Aristotle and Incommensurability: Some further Reflections», *Archive for History of Exact Siences,* 1981, Vol. 24, 1-9.

[13]. Knorr, W.R., «Techniques of Fractions in Ancient Egypt and Greece», *Historia Mathematica,* 9 (1982), 133-171.

[14]. Lam Lay-Yong and Shen Kangsheng, «Right-angled Triangles in Ancient China», *Archive for His. Exact Sci.,* Vol. 30, No 2, 87-112.

[15]. Maziarz E. and Greenwood Th., *GreekMathematical Philosophy,* Ungar, N. York 1968.

[16]. Moukanos D., «Probleme der Platonischen Philosophie der Mathematik», *Ἐπιστ. Ἐπετ. Φιλοσ. Σχ. Πανεπ. Ἀθηνῶν,* 1985, 571-584.

[17]. Mugler Ch., *Platon et la recherche mathématique de son époque,* Heitz, Strasbourg 1948.

[18]. Neugebauer O., «Studien zur Geschichte der Antiken Algebra III», *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik,* B, 3 (1936), 245-259.

[19]. Neugebauer O., *The exact sciences in Antiquity,* 1957, Dover, N. York 1969.

[20]. Onicescu O., «Pythagoras», Confer. in *Journées Pythagoriciennes,* Univ. d'Athènes, 1975.

[21]. Παπαθανασίου Μ., *Κοσμολογικαί καί κοσμογονικαί ἀντιλήψεις εἰς τήν Ἑλλάδα κατά τήν Β' χιλιετηρίδα π.Χ.,* Διδ. διατρ., Ἀθῆναι 1978.

[22]. Papathanassiou M., «Une notion de continuité dans l'ancienne pensée parabolique grecque» *ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ,* 2 (1979), 220-226.

[23]. Raven, J.E., *Pythagoreans and Eleatics,* Hakkert, Amsterdam 1966.

[24]. Rey A., *Les Mathématiques en Grèce au milieu du Ve siècle,* Exp. d'His. et Phil. des Sciences, Hermann, Paris 1935.

[25]. Sarton G., *A History of Science,* 1952, Norton, N. York 1970, I-II.

[26]. Seidenberg A., «The ritual origin of geometry», *Archive for His. Exact Sci.,* Vol. 1, No 5, 1962, 488-527.

[27]. Seidenberg A., «The origin of Mathematics», *Archive for His. Exact Sci.,* Vol. 18, 1978.

[28]. Seidenberg A., «On Ancient Mathematical Terminology», *Archive for His. Exact Sci.,* Vol. 31, No 1 1-13.

[29]. Σταμάτη Ε., *Στοιχεῖα Εὐκλείδου,* ΟΕΔΒ, Ἀθῆναι 1953-7.

[30]. Σταμάτη Ε., *Ἐπιστημονικαί Ἐργασίαι,* τομ. Α-Β, Τεχν. Επιμελ. Ελλάδος, Ἀθῆναι 1971.

[31]. Σταμάτη Ε., *Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι 1976.
[32]. Stanley Th., *Pythagoras*, The Philos, Res. Soc., Calif. 1970 (1687[1]).
[33]. Stephani A., Eschenbachii, A. Chr., Gesneri I. M., Tyrwhitti Th., *Orphica*, Hermannus, Lipsiae 1805.
[34]. Struik, D.J., *Συνοπτική Ἱστορία Μαθηματικῶν*, 1966[3], Ζαχαρόπουλος, Ἀθήνα 1982.
[35]. Szabó A., «Greek dialectic and Euclid's axiomatic», in Lakatos I: Problems in the Philos. of Math., *Proceed. of the Inter. Colloquium in the Philos. of Sci.*, London 1965, Vol. 1, N. Holland 1967
[36]. Szabó A., *Ἀπαρχαί τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν*, Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος, Ἀθῆναι 1973.
[37]. Taylor Th., *The theoretic arithmetic of the Pythagoreans*, London 1816, Weiser, N. York 1972.
[38]. Waerden, B.L.v.d., *Erwachende Wissenschaft. Aegyptische, Babylonische und Griechische Mathematik*, Basel-Stuttgart 1956.
[39]. Waerden, B.L.v.d., *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin 1983.
[40]. Χασάπη Κ., *Ἡ Ἑλληνική ἀστρονομία τῆς Β' χιλιετηρίδος π.Χ. κατά τούς Ὀρφικούς Ὕμνους*, διδ. διατρ., Ἀθῆναι 1967.
[41]. Zervos S., «On the development of mathematical intuition; on the genesis of geometry; further remarks», *Tensor*, N.S., 1972, Vol. 26, (397-467).

ΜΑΡΩ Κ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ
ΛΕΚΤΩΡ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ
ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ