Analyse des erreurs langagières chez les élèves en arithmétique

WALID SOLTANI[1], FAIZA CHELLOUGUI[2]

[1]Institut Supérieur de l'Éducation et de la Formation Continue
Université Virtuelle de Tunis
Tunisie
wsoltani2016@gmail.com

[2]Faculté des sciences de Bizerte
Université de Carthage
Tunisie
chellouguifaiza@yahoo.fr

ABSTRACT

This article aims to contribute to a reflection on language difficulties among students. The main objective is to identify syntactic, semantic and mixed errors in the proofs produced by the 3rd year secondary school students in Mathematics section in Tunisia. This evidence produced in arithmetic requires one of the reasonings: mathematical induction or proof by cases. The analysis of the productions allowed us to identify a diversity of formulations most often not consistent with the syntactic and semantic scriptures of these two reasoning by these students.

KEYWORDS

Mathematical language, arithmetic, mathematical induction, proof by cases, proof, syntactic, semantic

RÉSUMÉ

Cet article veut alimenter une réflexion sur les difficultés langagières des élèves. Son objectif principal est d'identifier ces erreurs syntaxiques, sémantiques et mixtes dans les productions des preuves des élèves de 3ème année secondaire, section Mathématiques en Tunisie. Ces productions principalement en arithmétique nécessitent l'un des raisonnements suivants : par récurrence ou par disjonction des cas. L'analyse de ces productions nous a permis de repérer une diversité le plus souvent non conforme aux écritures syntaxiques et sémantiques de ces deux raisonnements.

MOTS-CLÉS

Langage mathématique, arithmétique, raisonnement par récurrence, raisonnement par disjonction des cas, preuve, syntaxe, sémantique

INTRODUCTION

Les mathématiques, certes scientifiques, par leur rigueur, leur précision et leur certitude, sont des sciences formelles qui étudient les objets conceptuels. Elles sont toujours, exactes et démonstratives, mais abstraites, intellectuelles et arbitraires (Blanché, 1972).

Nous considérons, à la suite de Vergnaud (1991) que les mathématiques ne sont pas un langage mais que cependant le langage naturel et le langage symbolique jouent un rôle essentiel dans l’activité mathématique et dans l’apprentissage des mathématiques.

Certains élèves ont des lacunes à communiquer à l’aide d’un langage mathématique, à accomplir un raisonnement mathématique et n’arrivent pas à rédiger et justifier une preuve mathématique. En effet, des travaux en didactiques des mathématiques (Chellougui, 2003, 2009; De Serres & Groleau, 1997; Durand-Guerrier, 1996; Fabert & Grenier, 2011; Grenier, 2012; Hache, 2013, 2015, 2016; Hache & Mesnil, 2015; Harel, 2001; Mesnil, 2014) montrent des difficultés langagières persistantes chez les apprenants. Selon Sierpinska (2005) : « *Faire des preuves, c’est difficile. Évaluer les preuves des étudiants, n’est pas facile non plus* » (Sierpinska, 2005, p. 197).

Notre objectif est de susciter une réflexion sur les difficultés langagières rencontrées par les élèves dans le cadre de l'arithmétique et des raisonnements par récurrence et par disjonction des cas. En effet, la récurrence et la disjonction des cas sont deux types de preuve qui posent certaines difficultés de compréhension chez les apprenants dans l’enseignement et l’apprentissage (Dogan, 2016; Grenier, 2012; Harel, 2001; Soltani, 2019).

Dans notre article, nous examinons dans un premier temps comment le langage mathématique est utilisé dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Nous passons en revue les recherches en didactique des mathématiques portant sur les raisonnements. Nous étudions également la manière dont les programmes officiels de mathématiques pour l'enseignement secondaire en Tunisie intègrent le raisonnement et le langage mathématique. Enfin, nous présentons une analyse des travaux produits par des groupes d'élèves.

Le cadre théorique adopté dans notre travail se limite aux deux dimensions, syntaxique et sémantique, de la sémiotique de Charles W. Morris (Morris, 1938, cité dans Hottois, 1997) afin de repérer les erreurs syntaxiques, sémantiques et mixtes. Dans ce repérage, nous tentons de faire apparaître les éléments structurant chaque raisonnement, la récurrence (initialisation, hérédité et conclusion), la disjonction des cas (identification des cas possibles, étude des cas possibles obtenus et la conclusion).

ÉTUDE DIDACTIQUE

Rôle du langage mathématique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

Le langage mathématique peut être présenté par des textes, des énoncés et des mots et par des représentations symboliques algébriques et graphiques (Vergnaud, 1991).

Pour Vergnaud (1991) et De Serre et Groleau (1997) le langage mathématique est constitué de trois types de langages : le langage naturel, le langage symbolique et le langage graphique. Concernant le langage naturel, il est composé de termes usuels et de termes scientifiques propres à la discipline. Le langage symbolique est constitué d'un ensemble de symboles ayant un sens bien précis et de règles régissant leur agencement. Le langage graphique est composé d'un ensemble d’éléments visuels ou pictogrammes utilisés, munis de règles d'agencement.

Selon Mesnil (2014), le langage mathématique est une partie du *discours mathématique,* qui est l’ensemble des phrases, et de certains éléments de ces phrases (ceux à qui l’on peut donner un sens même si on les isole du reste de la phrase), prononcés, écrits, pensés dans un contexte où une ou des personnes font des mathématiques : « *Mais C. Laborde montre très bien qu’il y a un usage particulier de la langue en mathématiques, dû à l’interaction des deux codes de l’écriture symbolique et de la langue naturelle* » (Mesnil 2014, p. 88).

Hache (2015) s'intéresse aux "pratiques langagières des mathématiciens" et ceci pour souligner une réalité sociale, complexe, multiple et non figée. Selon lui les pratiques langagières articulent formalisme, langue naturelle et symboles de divers ordres. Il dit à ce propos : « *Les pratiques langagières des mathématiciens mélangent formalisme et langue naturelle et, à l'écrit, formalisme, langue naturelle et symboles de divers ordres* » (Hache, 2015, p. 29).

Selon Chellougui (2009, 2020), à l'entrée à l'université, le langage mathématique formalisé engendre des difficultés chez un grand nombre d'étudiants. Elle ajoute : « *L'étude didactique de ces difficultés met en évidence une perte de sens dans la manipulation des écritures formelles, qui annihile leurs potentialités en termes d'apprentissage de notions mathématiques* » (Chellougui, 2009). Elle adopte dans ses travaux de recherche l'hypothèse selon laquelle le formalisme logique joue un rôle important dans tout raisonnement soutenu par un langage mathématique largement utilisé dans une activité mathématique (Chellougui, 2020).

Une des premières fonctions importantes du langage mathématique est la communication. En effet, communiquer à l'aide du langage, c'est interpréter et produire des messages oraux et écrits, en combinant le langage naturel et des éléments spécifiques du langage mathématique : symboles et notations (Hache, 2013, 2015, 2016). Cette compétence est étroitement liée à la conceptualisation et à l'explicitation des connaissances, des processus et des démarches à la base d'un raisonnement mathématique ou de la résolution d'une situation-mathématique (situation d'apprentissage ou situation-problème). Elle joue un rôle essentiel dans toute activité mathématique. D'une part, elle permet d'améliorer et d'approfondir la compréhension d'une situation ou concept mathématique et d'autre part, elle est liée à la rédaction des preuves (Hache & Mesnil, 2015).

Le raisonnement mathématique et le langage mathématique (oral ou écrit) sont indissociables. En effet, le langage, qui englobe ici la langue naturelle, le lexique et le symbolique mathématiques, est à la fois l'outil et l'objet du raisonnement.

Raisonnements par récurrence et par disjonction des cas en arithmétique

Battie (2003) a effectué une étude épistémologique de l'arithmétique. Elle a mis en évidence les potentialités de l'arithmétique pour l'apprentissage des raisonnements mathématiques. Elle a éprouvé le besoin de distinguer deux dimensions dans le raisonnement en arithmétique, la dimension *organisatrice* et la dimension *opératoire*. Nous nous intéressons dans notre travail aux deux *formes organisatrices :* la récurrence et la disjonction de cas (Battie, 2003; Grenier, 2012; Soltani, 2019).

La récurrence

Le principe de récurrence est énoncé de la manière suivante :

Soit n un entier naturel. On considère une propriété P dépendant de n : P(n).

Initialisation : la propriété P est vraie pour un certain entier n_0.

Hérédité : la propriété P est héréditaire à partir du rang n_0, c'est-à-dire :

pour tout $n \geq n_0$, (P(n) implique P(n+1)) est vraie.

Conclusion : la propriété P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0, c'est-à-dire pour tout $n \geq n_0$ P(n) est vraie.

Selon Grenier (2012), la récurrence en mathématiques est considérée comme un type de raisonnement équivalent à une autre forme de raisonnement qui est le raisonnement inductif.

Disjonction des cas

Selon Battie (2003), le raisonnement par disjonction des cas se base sur l'étude de tous les cas possibles d'une partition d'un ensemble. Autrement dit, *raisonner par disjonction de cas* sur un ensemble E, c'est considérer une partition finie de cet ensemble et la traiter séparément dans chaque cas défini par cette dernière. Elle ajoute, pour démontrer qu'une proposition est vraie pour tout élément d'un ensemble E, qu'on peut démontrer qu'elle est vraie pour tous les sous-ensembles (non vides) qui forment une partition de E.

En outre, Mesnil (2015) a utilisé une autre définition s'appuyant sur les connecteurs logiques, l'implication et la disjonction, en donnant une formulation dans la logique des propositions conforme aux règles syntaxiques et sémantiques : *« Pour montrer l'implication entre les propositions p et q, où p est une disjonction de propositions pi : p=* $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$*, en utilisant un raisonnement par disjonction de cas il faut montrer que chaque implication* $p_i \Rightarrow q$ *est vraie, c'est-à-dire montrer que les implications (*$p_1 \Rightarrow q$*,* $p_2 \Rightarrow q$*......... et* $p_n \Rightarrow q$*) sont toutes vraies. Nous pouvons conclure alors* : *p⇒q ».* (Mesnil, 2014, p. 168).

La place du raisonnement et du langage mathématique dans les programmes officiels des mathématiques de l'enseignement secondaire tunisien

Depuis 2002, l'enseignement des mathématiques en Tunisie a pour objectif général d'amener l'élève à pratiquer, à raisonner et à communiquer. En effet, le programme des mathématiques en vigueur (2008)[1] au secondaire est axé sur le développement de trois compétences intimement liées, analogues :

Pratiquer une démarche mathématique.

Déployer un raisonnement mathématique.

Communiquer à l'aide du langage mathématique.

Le programme officiel de 2008 propose une typologie des raisonnements mathématiques (inductif, déductif, absurde, récurrence). Parmi les objectifs du développement d'un raisonnement mathématique : réaliser des preuves, structurer et justifier des étapes d'une démarche pertinente.

Dans la section nommée « *Communiquer dans un langage mathématique* », le programme officiel insiste sur l'importance du développement des aptitudes chez les élèves à partir des activités orales et écrites à expliquer un tel raisonnement mathématique de façon précise et rigoureuse. Nous pouvons lire :

« - Les élèves décrivent une figure ou un graphique en utilisant un vocabulaire mathématique.
- Les élèves expliquent oralement, en utilisant un vocabulaire mathématique, une procédure, un algorithme de calcul, un raisonnement ou le choix d'une stratégie.
- Les élèves rédigent une démonstration ou la solution d'un problème.
- Les élèves discutent avec les autres une démarche, un raisonnement ou une stratégie ». (DPN[2], 2008, p. 4).

Le raisonnement par récurrence est un objet d'enseignement mentionné dans ce programme pour les classes de 3$^{\text{ème}}$ année secondaire, toutes sections confondues. Ce qui n'est pas le cas pour le raisonnement par disjonction des cas qui n'a jamais été mentionné, ni dans le programme ni dans le manuel, en tant que tel raisonnement (Soltani, 2019). Notons, par ailleurs, que le manuel propose des activités et des exercices qui nécessitent ce type de raisonnement. Ce qui est cité dans le programme par : « *Ils émettent des conjectures en*

[1] Programme fixé par la loi du 11 février 2008, modifiant et complétant la loi d'orientation du 23 juillet 2002, relative à l'éducation et à l'enseignement scolaire.
[2] Direction de la Pédagogie et des Normes.

utilisant un raisonnement inductif, un raisonnement déductif ou un raisonnement par l'absurde ou un raisonnement par récurrence » (DPN, 2008, p. 4).

Le tableau suivant (Tableau 1) montre la place du raisonnement par récurrence dans le manuel de 3ème année secondaire, section Mathématiques.

TABLEAU 1

Le raisonnement par récurrence dans le contenu disciplinaire, classe 3ème année secondaire, section Mathématiques

Contenu disciplinaire	Aptitudes à développer
• **Suites numériques**	Exploiter le principe de récurrence pour montrer qu'un réel est un majorant ou un minorant d'une suite ou pour étudier les variations d'une suite.
• **Arithmétique** • **Principe de récurrence**	Démontrer une propriété sur les entiers naturels en utilisant le principe de récurrence.

INVESTIGATION EXPÉRIMENTALE

Notre expérimentation s'est déroulée en 2018 avec 16 élèves d'une même classe de la 3ème année section Mathématique (Lycée secondaire Jendouba). Nous avons proposé quatre situations mathématiques nécessitant les deux types de raisonnements par récurrence et par disjonction des cas, aux élèves en les faisant travailler en groupes[3] sur une feuille distribuée.

Le but de cette expérimentation est d'analyser les démarches employées par les élèves pour conduire l'un des deux raisonnements dans chacune des productions des quatre situations.

TABLEAU 2

Les quatre situations proposées aux élèves (Soltani, 2019)

Situation 1	Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $B(n) = 7^n - 2^n$ est divisible par 5.
Situation 2	Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $2^n \geq n$.
Situation 3	Démontrer que : pour tout entier naturel n, l'entier n(n+1) est pair.
Situation 4	Soit a un entier naturel, Démontrer que : $4a^3 - a$ est un multiple de 3.

Analyse des démarches employées par les groupes d'élèves pour conduire les deux raisonnements dans des productions des quatre situations.

Nous avons recueilli 16 copies des quatre groupes d'élèves. Chaque groupe a produit quatre réponses respectives aux quatre situations. Pour mener l'analyse des résultats, nous avons commencé par identifier les éléments qui structurent chaque raisonnement. Puis, nous avons effectué une description des différentes méthodes utilisées par les élèves dans chaque raisonnement. Par ailleurs, nous avons identifié les erreurs langagières de type sémantiques, syntaxiques et mixtes dans les preuves produites.

Nous présentons dans la suite une analyse des productions suivant chacun des raisonnements par récurrence et par disjonction des cas.

[3] Quatre groupes de 4 élèves chacun.

Résultats et discussion

Les productions qui utilisent le raisonnement par récurrence

Parmi les erreurs de type syntaxique, il y a une omission de l'*implication* et du *quantificateur universel* dans l'étape de l'hérédité. En plus, on trouve un mauvais usage de l'implication et du quantificateur à cette étape.

Dans certaines productions, nous avons remarqué que les écritures des symboles d'*équivalence* et du *quantificateur universel* ne justifient pas les démarches du raisonnement conduit. Il s'agit des erreurs de type sémantique.

Les erreurs mixtes sont repérées dans les étapes du raisonnement sans aucun lien logique lors de la justification de l'hérédité.

Également, dans certaines productions, il y a une confusion entre les symboles des connecteurs logiques : $\Leftrightarrow$ et $\Rightarrow$.

Pour notre article, nous illustrons ce propos par une analyse des productions de deux groupes d'élèves (Groupe A et Groupe B) des situations respectives 1 et 3 (Soltani, 2019).

TABEAU 3

Preuve de la situation 1 produite par le Groupe A

L1	Pour n=0, on a B(0) = 0 donc B(0) vrai	
L2	• on suppose que $B(n) = 7^n – 2^n$ est divisible par 5	
L3	Jusqu'à l'ordre n.	
L4	• on montre que $B(n+1) = 7^{n+1} – 2^{n+1}$ est divisible par 5	
L5	En effet : $B(n+1)$	$= 7^{n+1} – 2^{n+1} = 7.7^n – 2.2^n$
L6		$= 7(7^n – 2^n) + 7.2^n + 2(–2^n + 7^n) – 2.7^n.$
L7		$= B(n)\ (7+2) + 7.2^n – 2.7^n.$
L8		$= 9B(n) + 7.\ 2(2^{n-1} – 7^{n-1})$
L9		$= 9B(n) – 14B(n–1)$
L10	$B(n–1) = 7^{n-1} – 2^{n-1}.$	

Dans cette preuve, d'une part, la propriété P(n) à démontrer n'est pas identifiée et d'autre part, l'initialisation n'est pas vérifiée et comporte une erreur sémantique. En effet, l'expression présentée dans L1 n'est pas explicitement vérifiée. L'étape de l'hérédité (L2–L5) n'est pas justifiée et comporte des erreurs mixtes. En effet, l'implication est implicite, l'entier naturel n n'est pas introduit, la formulation de B(n+1) à partir de B(n) n'est pas justifiée, les manipulations algébriques (factorisation, division euclidienne et combinaison linéaire) qui sont utilisées pour démontrer que "B(n+1) est divisible par 5" ne sont pas pertinentes. La conséquence de la récurrence est absente.

TABLEAU 4

Preuve de la situation 3 produite par le Groupe B

L1	n (n+1) est pair
L2	pour n=0
L3	0 (0+1) = 0 : pair
L4	on suppose qu'elle est vraie et on montre
L5	qu'elle est vrai à l'ordre n+1 est pair
L6	$n\ (n+1) = n^2+n$
L7	on a : (n+1) (n+1+1)
L8	$= n^2+2n+n+2$
L8	$= n^2+ 3n+2$
L9	$= n^2+2n+n+2$
L10	$\Leftrightarrow n\ (n+1) + 2(n+1)$
L11	pair pair : Vrai
L12	conclusion $\forall n \in \mathbb{N}.\ n(n+1)$ est pair.

Dans cette preuve, la propriété P(n) est mal identifiée, L_1 comporte une erreur syntaxique. L'initialisation est mal expliquée. L'étape de l'hérédité (lignes L4 et L5) comporte *des erreurs mixtes :* l'une sémantique par le fait que ces deux phrases n'ont aucun sens et l'autre syntaxique qui se manifeste au niveau d'absence du quantificateur universel et l'invisibilité de l'implication de l'hérédité. La formulation de P(n+1) à partir de P(n) est fausse. En effet, les manipulations algébriques sont incorrectes par le fait que le connecteur logique $\Leftrightarrow$ est mal utilisé (ligne L10) et la combinaison linéaire est invisible (ligne L11). Ainsi, la vérification de l'hérédité dans cette preuve comporte des erreurs mixtes.

Les productions qui utilisent le raisonnement par disjonction des cas

Nous avons distingué dans ces productions les trois types d'erreurs suivants :

- Les erreurs de type syntaxique : on trouve l'omission du connecteur logique *implique* dans l'étude des cas possibles.
- Erreur de type sémantique : comme l'explication mal organisée et incompréhensible dans l'étude des cas possibles.
- Les erreurs de type mixtes : absence d'identification des cas possibles obtenus et la répartition de l'ensemble $\mathbb{N}$ ou succession des phrases sans lien logique dans l'étude des cas possibles.

Pour notre article, nous illustrons ce propos par une analyse des productions de deux groupes d'élèves (Groupe C et Groupe D) des situations respectives 3 et 4 (Soltani, 2019)

TABLEAU 5

Preuve de la situation 3 produite par le Groupe C

L1	soit n est pair $\Rightarrow$ n = 2k k$\in\mathbb{N}$
L2	n+1 = 2k+1
L3	n (n+1) = 2k (2k+1)
L4	= 4k + 2k
L5	= $\underbrace{2\ (2k+k)}$
L6	est pair
L7	donc n (n+1) est pair
L8	si n = 2k+1
L9	n (n+1) = (2k+1) (2k+1+1)
L10	= (2k+1) (2k+2)
L11	= 2 (2k+1) (k+1)
L12	donc n (n+1) est pair
L13	conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$. n(n+1) est pair

Dans cette preuve, d'une part, la répartition de l'ensemble $\mathbb{N}$ en deux parties disjointes n'était pas écrite. D'autre part, l'identification des cas possibles est absente. D'autant plus, l'étude des cas possibles comporte deux erreurs mixtes. L'une est *syntaxique* au niveau des implications (si…alors) dans l'étude des deux cas possibles : en effet, ce groupe utilise « soit...donc » (L1 et L7) et « si…donc » (L8 et L12) qui ne sont pas conformes à la syntaxe logique. L'autre est *sémantique* qui se présente dans les explications mal organisées et incompréhensibles (L5, L7 et L12).

Dans la preuve de la situation 4, d'une part, la répartition de l'ensemble $\mathbb{N}$ en trois parties disjointes n'était pas écrite. D'autre part, l'identification des cas possibles est absente ; de plus, l'étude des cas possibles comporte des erreurs syntaxiques. Dans ce groupe, *l'implication* (si…alors) dans l'étude des deux cas possibles est exprimée par « si…on a » (exemple : L1 et L2). D'où la nécessité de développer chez les élèves au secondaire un langage mathématique rigoureux afin de formuler, justifier et valider une preuve en arithmétique**.**

TABLEAU 6

Preuve de la situation 4 produite par le Groupe D

L1 *si $a = 3k$	L11 $= 108k^3+36k^2+105k+3$
L2 on a : $4\ (3k)^3 - 3k$	L12 $= 3\ (36k^3+12k^2+35k+1) \Rightarrow$ multiple de 3
L3 $= 4.27.k^3\text{-}3k$	L13 *si $a = 3k+2$
L4 $= 108k^3\text{-}3k$	L14 on a : $4\ (3k+2)^3 - 3k\text{-}2$
L5 multiple de 3.	L15 $= 4\ (3k+2)^2\ (3k+2) - (3k+2)$
L6 * si $a = 3k+1$	L16 $= 4\ (9k^2+12k+4)\ (3k+2) - (3k+2)$
L7 on a : $4\ (3k+1)^3 - (3k+1)$	L17 $= 4\ (27k^3+36k+12k+18k^2+24k+8)–3k–2$
L8 $= 4\ (3k+1)^2\ (3k+1) –(3k+1)$	L18 $= 108k^3+144k+48k+72k^2+96k+32–3k–2$
L9 $= 4\ (9k^2+6k+1)\ (3k+1) - (3k+1)$	L19 $= 108k^3 +285k+72k^2 +30$
L10 $= 4\ (27k^3+18k+3k+9k^2+6k+1)–3k–1$	L20 $= 3\ (36k^3 + 95k + 24k^2 +10) \Rightarrow$ multiple de 3.

CONCLUSION

Cette étude nous a permis d'identifier certains nombres d'erreurs de nature langagière chez les élèves au secondaire en mathématiques pour développer et appliquer les deux raisonnements par récurrence et par disjonction des cas en arithmétique et de mieux comprendre les difficultés des élèves en lien avec ces raisonnements.

Par ailleurs, nous avons constaté que l'usage de deux langages, naturel et symbolique ne favorise pas nécessairement la compréhension des deux concepts récurrence et disjonction des cas chez les élèves de 3ème année section *Mathématiques*. En effet, les productions des groupes d'élèves mettent en évidence des difficultés de nature sémantique et/ou syntaxique. Ces difficultés sont parfois liées d'une part, à l'insuffisance des connaissances logiques et au manque de maîtrise des propriétés de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et d'autre part, à la conversion du registre du langage symbolique à celui de la langue naturelle en arithmétique (Chellougui, 2009; Fabert & Grenier, 2011; Grenier, 2012).

Pour le raisonnement par récurrence, l'analyse des productions des élèves a montré certaines difficultés majeures dans l'étape d'hérédité et la conséquence de ce raisonnement. Pour le raisonnement par disjonction des cas, les difficultés rencontrées sont généralement liées à la répartition de l'ensemble $\mathbb{N}$ et les implications dans l'étude des cas possibles (Soltani, 2019).

Il nous apparaît important de mettre en place une formation continue des enseignants de mathématiques de l'enseignement secondaire portant essentiellement sur les langages naturel et symbolique et les notions de la logique des mathématiques (Mesnil, 2014) afin d'aider les élèves à dépasser certains obstacles dans les différents raisonnements en arithmétiques. Il serait aussi important de réfléchir à la place des deux types de langages dans la classe mathématique.

RÉFÉRENCES

Battie, V. (2003). *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*. Thèse de l'Université Paris 7, France.

Blanché, R. (1972). *L'épistémologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

Chellougui, F. (2003). L'utilisation des quantificateurs dans l'enseignement secondaire tunisien. *L'Ouvert, 108*, 25-33.

Chellougui, F. (2009). L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 29*(2), 123-154.

Chellougui, F. (2020). La déduction naturelle de Copi comme outil didactique pour l'analyse de preuves mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 40*(3), 319-361.

De Serres, M., & Groleau, J.-D. (1997). *Mathématiques et langages*. Collège Jean-de-Brébeuf.

Durand-Guerrier, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de l'Université Lyon 1, France.

Dogan, H. (2016). Mathematical Induction: Deductive logic perspective. *European Journal of Science and Mathematics Education, 4*(3), 315-330.

Fabert, C., & Grenier, D. (2011). Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique. *Petit x, 87*, 31-52.

Grenier, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x, 88*, 27-47.

Hache, C. (2013). Langage mathématique à la transition primaire/collège. In *Actes du 39ème colloque de la Copirelem* (pp. 452-463). Quimper: Copirelem.

Hache, C. (2015). Pratiques langagières des mathématiciens, une étude de cas avec « avec ». *Petit x, 97*, 27-43.

Hache, C. (2016). Logique, langage. Énoncés et preuves en mathématiques. In *Actes du 21e colloque de la CORFEM*. Grenoble: Adirem. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01285113v1.

Hache, C., & Mesnil, Z. (2013). Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. In M. Gandit M. & B. Grugeon-Allys (Dir.), *Actes des 17ème et 18ème colloques CORFEM* (pp. 201-224). France: Université et IUFM de Franche-Compte.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), *Learning and Teaching Number Theory* (pp. 185-212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.

Hottois, G. (1997). *De la renaissance à la post-*modernité. Bruxelles: De Boeck Université.

Mesnil, Z. (2014). *La logique : D'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot, France.

Morris, C. W. (1938). *Foundations of the theory of signs*. Chicago University Press.

Sierpinska, A. (2005). Quelques réflexions sur la valeur des raisonnements mathématiques dans la formation de futurs citoyens et professionnels. In *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 197-219). Université du Québec à Montréal.

Soltani, W. (2019). *Une approche didactique des deux raisonnements par récurrence et par disjonction des cas en arithmétique en 3ème année secondaire section Mathématiques*. Mémoire de master de didactique des mathématiques. ISEFC, Université Virtuelle de Tunis, Tunisie.

Vergnaud, G. (1991). Langage et pensée dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie, 96*, 79-86.

Programmes de Mathématiques

DPN. (2008). *Programmes de Mathématiques, Enseignement secondaire*. République Tunisienne Ministère de l’Éducation et de la Formation, Direction de la Pédagogie et des Normes du cycle préparatoire et de l'enseignement secondaire, Tunisie.