La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde: une étude longitudinale dans l'école secondaire Argentine

VIVIANA CAROLINA LLANOS, MARIA RITA OTERO

Nûcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NiecyT)
Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Consejo Nacional de Investigaciones en Ciencia y Tecnología (CONICET)
Argentine
vcllanos@exa.unicen.edu.ar
rotero@exa.unicen.edu.ar

RÉSUMÉ

Dans ce travail on présente quelques aspects d'une étude longitudinale et exploratoire développée dans l'école secondaire en Argentine. On a utilisé les notions de Pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde et de parcours d'étude et recherche (PER) de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). Il s'agit d'introduire cette pédagogie d'une manière locale et contrôlée dans la 4éme et 5éme année de l'école secondaire. On a développé un PER autour la question: comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes si l'on connait seulement ses représentations graphiques et l'unité sur les axes? Le travail propose l'organisation praxéologique de référence, les organisations mathématiques qu'on a rencontré dans la mise en œuvre du PER, et celles qu'on pourrait rencontrer. On analyse l'activité mathématique dans la salle et des difficultés en rapport à l'adoption de la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde dans l'école en Argentine.

MOTS-CLÉS

Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), Pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde, parcours d'étude et recherche (PER), enseignement des mathématiques

Abstract

In this paper we present some aspects of a longitudinal and exploratory study developed in the secondary school in Argentina. We use the ideas of Pedagogy of research and questioning the world and course of study and research (CSR) of the Anthropological Theory of Didactics (TAD). We have carried out this pedagogy in a local and controlled way in the 4th and 5th year of the high school. We developed a (CSR) around the question: How to do operations with whatever graph if we only know their graphic representations and the unit on the axes? The work proposes the mathematical organization of reference, the mathematical organizations we've really met developing the CSR, and those we could meet. We analyze the mathematical activity in the classroom and the difficulties that we faced adopting the pedagogy of research and questioning the world in secondary school classrooms in Argentine.

Keywords

Anthropological Theory of Didactics (ATD), Pedagogy of research and questioning the world, course of study and research (CSR), mathematics education

Introduction

L'enseignement des mathématiques dans l'école secondaire en Argentine fait face à des problèmes complexes et difficiles à surmonter. Ces problèmes sont bien loin d'être exclusifs à notre pays, et ils revêtent une certaine généralité dans le monde. Le paradigme dominant est celui de la visite des œuvres et le modèle didactique prédominant est mécaniciste, c'est-à-dire que l'activité essentielle des élèves est réduite à la reproduction de ce que l'enseignant exprime et propose au moyen de guides, de travaux pratiques, ou ce que le texte "dit". En conséquence, l'activité reconnue à l'enseignant est de proposer ce qu'il faut étudier et sa tâche est fréquemment de «montrer» le savoir –comme se montrent des œuvres dans une visite au musée– comme des œuvres finalisées et, comme le dit Chevallard, "mortes". Ce phénomène, caractérisé dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), a été nommé monumentalisation du savoir (Chevallard, 2004). La TAD a proposé un nouveau paradigme: la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde, dont l'exécution conduit au développement d'un processus de recherche qui a été nommé Parcours d'étude et de recherche (PER) (Chevallard, 2004, 2009, 2011).

Notre recherche essaie d'introduire dans l'école secondaire en Argentine, d'une manière locale et expérimentalement contrôlée, la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde (Chevallard, 2004). Il s'agit d'une étude longitudinale qui développe des PER pendant deux années consécutives de la scolarité.

La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde exige quatre attitudes basiques et mises en relation (Chevallard, 2012), elles sont: l'attitude relative aux questions, essentielle dans une pédagogie des PER; l'attitude Herbartiene qui est rattachée à la recherche et la génération d'une réponse aux questions proposées; l'attitude pro-cognitive qui consiste en accepter n'importe quelle question bien qu'elle soit complètement inconnue, en connaissant "en avant", par opposition à une attitude rétro-cognitive, qui est habituelle dans la pédagogie de la visite des œuvres, et qui consiste à n'admettre seulement que des questions pour lesquelles on a une réponse; et finalement, celle-là d'être exotérique, donc il y a indéfiniment des nouvelles choses pour apprendre. Un exotérique doit toujours apprendre, et il n'atteindra jamais la condition d'érudit. Ces attitudes sont peu habituelles dans l'enseignement courant, et en conséquence, il est complexe de mettre en œuvre des PER au sens strict.

On présent tout de suite les caractéristiques générales d'une recherche qui développe un PER en partent de la question la génératrice Q_0: *comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes ?* L'élaboration d'une réponse à cette question engendre quelques parcours qui permettent une couverture relativement complète des programmes des trois dernières années de l'école secondaire en Argentine (14-18 ans).

Cadre Théorique

La théorie anthropologique du didactique (TAD) (Chevallard, 1999) propose d'enseigner depuis un nouveau paradigme nommé pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde (Chevallard, 2004, 2012). Pour mettre en œuvre cette pédagogie il faut introduire dans l'école des parcours d'étude et de recherche (PER) (Chevallard, 2007, 2009). Les programmes d'études devraient consister en paires de questions et de réponses $P= (Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, à partir d'une question génératrice. Il s'agit des questions dont la réponse permet de retrouver les praxéologies mathématiques (OM) proposées dans les programmes d'études. Ces réponses doivent être des réponses dans un fort sens, et pas simplement la recherche et la reproduction d'information. Chevallard a beaucoup insisté sur le fait que les réformes éducatives successives ont substitué l'étude des questions Q par l'apprentissage des réponses R. Par conséquent, dans l'école on étudie une succession de réponses dont on ne connait pas bien les questions correspondantes. Alors, les questions à étudier sont des questions "mortes", dépourvues de sens et de raison d'être pour les élèves aussi que pour les enseignants. Les PER permettent de reformuler les programmes d'études à partir d'un ensemble de questions “cruciales” ou “génératrices”. Leur introduction exige de modifier le modèle d’enseignement traditionnel et la pédagogie dominante.

La générativité de Q_0 est cruciale dans les PER, parce qu’elle conduit à l’émergence de plusieurs Organisations Mathématiques (OM). Le schème Herbartiene[1] développé $[S(X;Y;Q) \rightarrow \{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, ..., R_n^{\diamond}, O_{n+1}, ..., O_m\}] \hookrightarrow R^{\heartsuit}$, exprime les caractéristiques et la manière d’élaborer la réponse dans un PER. Elle doit s’organiser autour d’une question génératrice (Q_0). Celle-ci est une exigence sine qua non et elle doit permettre la création d’un milieu $M=\{R_1^{\diamond}, R_2^{\diamond}, ..., R_n^{\diamond}, O_{n+1}, ..., O_m\}$ devant mener à l’élaboration, la validation et l’institutionnalisation d’une réponse $R^{\heartsuit}$. Les PER mettent en acte cinq gestes de base, soit : observer ; analyser et évaluer les réponses “déjà faites” $R_1^{\diamond}$ $1 \leq i \leq n$ - existantes dans la culture, et qui peuvent être fournies par des livres, des enseignants, l’internet, etc.; mais aussi développer; répondre et défendre la réponse $R^{\heartsuit}$ qui en résulte du processus d’étude.

La pédagogie de l’enquête et du questionnement du monde qui se réalise dans des PER, est soutenue par quatre attitudes basiques (Chevallard, 2012) :

1. l’habitude de questionner et la disposition d’affronter n’importe quelle question (les étudiants d’une classe ou un étudiant particulier étudieront toujours une question Q avec l’aide des enseignants);
2. celle-là d’être “Herbatiene”, rattachée à la recherche et la génération d’une réponse de la manière proposée par le schéma du même nom, présenté à l’avance;
3. l’attitude d’être “pro-cognitif”, il s’agit d’accepter n’importe quelle question, même si elle semble totalement nouvelle et inconnue et de chercher à connaître toujours “en avant”, au lieu d’en arrière (cette dernière attitude est nommée par opposition à l’attitude rétro cognitive, plus habituelle dans la pédagogie actuelle, et il s’agit d’accepter seulement les questions pour lesquelles il y a une réponse, ou l’on a déjà étudié la réponse);
4. l’attitude de se comporter d’une manière exotérique, c’est-à-dire d’agir en face de la question comme le novice, au lieu de l’érudit, comme quelqu’un qui doit apprendre indéfiniment, et qui n’atteindra jamais l’état de “spécialiste”.

1 Chevallard remarque que l'adjectif “Herbartiene” fait référence au philosophe et pédagogue J. F. Herbart (1776-1841). Continuateur de Kant, c'est l'un des premiers qui traite l'élévation de la pédagogie au niveau de la science, appuyé sur une double basse spéculatif et expérimental. Il a associé les principes de l'éducabilité, le moral et une psychologie de la systématisation du système d'enseignement. La pédagogie est une vie de réalisation individuelle du principe de la liberté. Son influence a été importante en Allemagne où il est considéré comme l'un des fondateurs de la pédagogie scolaire.

Questions de la recherche

1) Quelles sont les caractéristiques du PER développé et des organisations mathématiques qui seront rencontrées pendant le parcours?
2) Quelles activités mathématiques ont développé les élèves?
3) Quelles difficultés ont été trouvées pour le développement du PER et de la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde?

Méthodologie

Il s'agit d'une étude exploratoire longitudinale, qualitative et ethnographique. Les parcours développés sont décrits dans la section où l'on analyse la mise en œuvre dans des salles habituelles de l'école secondaire. Cela est remarquable parce qu'il n'y a pas encore beaucoup de recherches qui se développent sans la création de tels cours, lesquels sont "artificiels" par rapport aux cours courants. Les implémentations ont été sous la responsabilité des chercheurs dans deux cours sélectionnés intentionnellement dans le même établissement éducatif.

Le PER commence quand les étudiants initient la 4^{éme} année du secondaire et continuent pendant l'année suivante, c'est-à-dire durant la 5^{éme} année. Le projet a été réalisé avec deux cohortes, dans la première, il y avait N=59 étudiants qui ont tous complété l'année. Dans la deuxième cohorte, N=56 étudiants ont commencé et N=53 ont terminé.

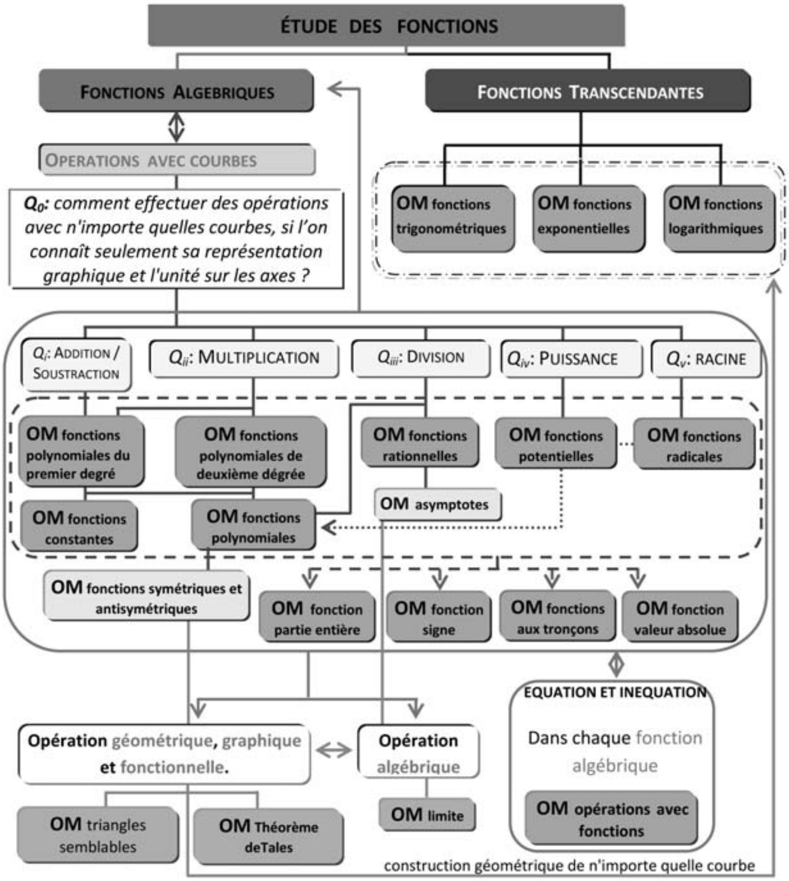
Les protocoles écrits de chaque étudiant ont été obtenus dans toutes les classes. Les classes ont été enregistrées en audio, parce que les enregistrements en vidéo sont interdits par les autorités scolaires. Des notes de terrain ont été réalisées au moyen de l'observation participante et non participante.

L'Analyse du Per

Le PER part de la question la génératrice Q_0 *: comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes si l'on connaît seulement ses représentations graphiques et l'unité sur les axes?* (Otero & Llanos, 2011). Cette question est inspirée par un problème proposé par Régine Douady (1999) pour l'étude des signes des fonctions polynomiales, quand on connaît seulement les représentations graphiques des droites et l'unité sur les axes (Schéma 1).

L'analyse des possibles dérivations de Q_0 permet d'établir une praxéologie de référence, composée de plusieurs Organisations Mathématiques Locales (OML), où lesquelles on peut rencontrer au long du parcours. Elles sont toutes comprises dans le programme d'études des trois dernières années de la secondaire en Argentine. La

Schéma 1



Représentation des possibles OML comprises dans le PER

question génératrice Q_0 ouvre une variété d'opérations et de courbes possibles, à partir desquelles se retrouve l'OM des fonctions algébriques. Les fonctions nommées transcendantes ne peuvent pas être reconstruites à partir des opérations avec des courbes comme les autres, mais il y a des techniques géométriques qui permettent de construire des points appartenant à des courbes correspondantes aux fonctions nommées, et qui peuvent être obtenues par adaptation des autres construites à l'intérieur du PER. Dans le schéma 1 on trouve les divers OML qu'on pourrait reconstruire à partir de Q_0. La quantité de parcours possibles augmente selon les courbes et les opérations possibles avec ces courbes. Par exemple:

- si l'on fait la soustraction des droites avec la même pente, il est possible de reconstruire l'OM des fonctions constantes;

- si l'on fait l'addition ou la soustraction des droites il est possible de reconstruire l'OM des fonctions linéaires ou polynômiales de premier degré;
- la multiplication de deux droites permet de reconstruire l'OM des fonctions polynômiales du deuxième degré;
- la multiplication de trois droites, ou de paraboles et de droites, ou entre paraboles, permettent de reconstruire l'OM des fonctions polynomiales;
- la division entre des fonctions polynomiales permet de reconstruire l'OM des fonctions rationnelles et comme conséquence l'OM des asymptotes et de la limite;
- la racine ou la puissance d'une courbe permet de reconstruire l'OM des fonctions potentielles et les radicales correspondantes.

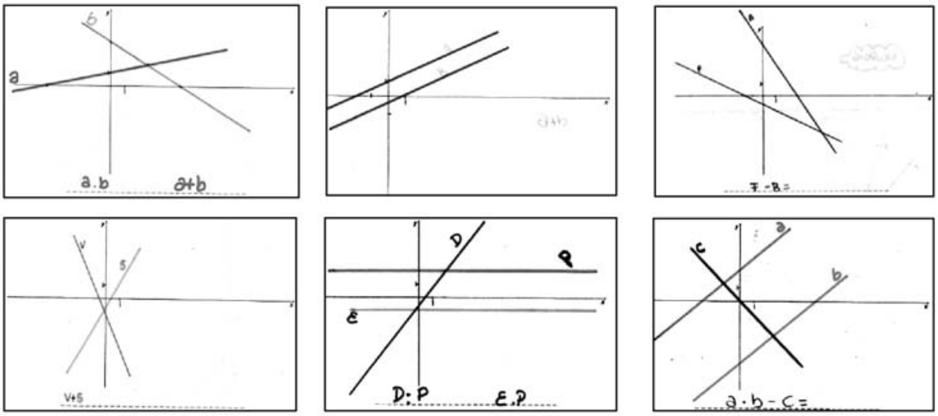
L'objectif de couvrir les programmes d'études avec un PER articulé se réalise dans cette recherche. Les OM qu'on peut rencontrer font partie des programmes d'étude et elles ont une raison d'être, donc elles surgissent de la question Q_0. Les OM à reconstruire seront déterminées par le choix des courbes et par l'opération qu'on propose de réaliser entre elles, quand seulement la représentation graphique et l'unité sur les axes sont connues. C'est le propre développement des parcours qui a initialisé et fixé, en fonction des courbes et des opérations disponibles aux étudiants, les OM qu'on va rencontrer.

Le schéma suivant mentionne les OM relatives à un type de fonction, lesquelles incluent aussi les équations respectives. Le traitement pourrait comprendre différents niveaux algébriques où les variables et les paramètres sont généraux, bien qu'on puisse les modifier, et ce niveau pourrait se produire à la fin du parcours (Bolea, Bosch & Gascón, 2001; Ruiz- Munzón, Bosch & Gascón, 2010).

Le Per

L'enseignant introduit la question Q_0: *comment effectuer des opérations avec n'importe quelles courbes, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes ?* Les étudiants proposent des réponses possibles à la question selon les courbes choisies, et aussi, des opérations qu'ils souhaitent réaliser. Notamment, ils proposent des opérations entre deux ou plusieurs droites, seulement dans quelques cas exceptionnels qu'on peut regarder ici. Ils proposent d'agir avec des courbes qu'ils ne connaissent pas. Entre la variété des résultats obtenus, quelques réponses ont été sélectionnées:

EXEMPLES 1



Les élèves ont proposé les justificatifs suivants:

EXEMPLES 2

RECTAS: Nosotras elegimos rectas, ya que es una forma fácil de representar y calcular un problema

Nous avons choisi des droites, car, elles sont faciles de représenter et calculer un problème

Elegimos rectas porque eran las únicas que vimos años anteriores y, por lo tanto, las únicas que sabíamos. Elegimos suma, multiplicación, división y radicación porque son las operaciones que más manejamos.

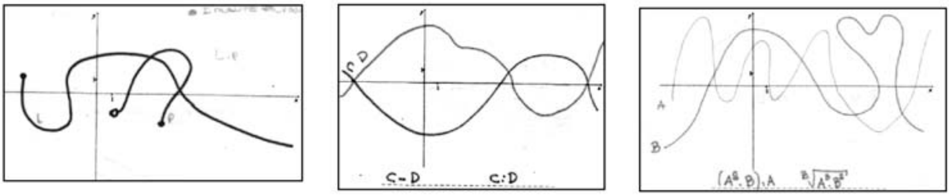
Nous avons choisi des droites, parce que nous les avons déjà vues dans les années précédentes. Nous avons choisi adition, multiplication, et racine parce que ces sont les opérations que nous manions le mieux

Hicimos la elección de rectas debido a que únicamente vimos el contenido de función lineal, y también creemos que resolver problemas con rectas es más fácil que curvas. Las operaciones que utilizamos fueron las básicas (+, −, ×, ÷) porque son más sencillas de resolver.

Nous avons choisi des droites, parce que nous avons vu le sujet fonction linéaire, et nous croyons que c'est plus facile de résoudre des problèmes avec des droites aussi qu'avec des courbes. Nous avons utilisé les opérations basiques adition, soustraction, multiplication et division.

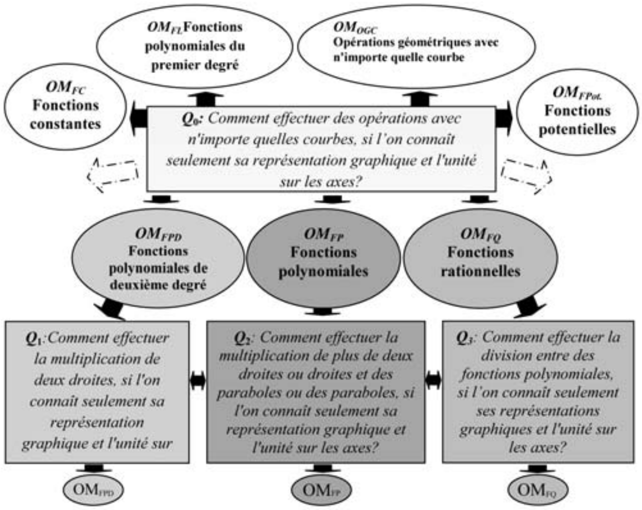
Bien que quelques options apparaissent, celles qui prédominent sont des droites. Parmi les opérations, ils considèrent l'addition, la soustraction, la multiplication et la division et aussi des opérations combinées. Seulement dans quelques cas, il apparaît le problème d'élever au carré ou d'extraire la racine carrée d'une droite. En plus des droites, certains groupes choisissent d'autres courbes qui ne sont pas des fonctions connues:

EXEMPLES 3



Quand la question génératrice a été proposée, et les réponses possibles ont été analysées avec les étudiants, l'enseignant a décidé de commencer par les droites parce que c'étaient les plus disponibles initialement aux étudiants. En particulier, on a commencé par la multiplication de deux droites, ce qui conduit à l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré, qui se trouve dans le programme d'études de la 4$^{\text{éme}}$ année. D'autres possibilités comme la multiplication de plus de deux droites ou la

SCHÉMA 2



Des possibles PER développés

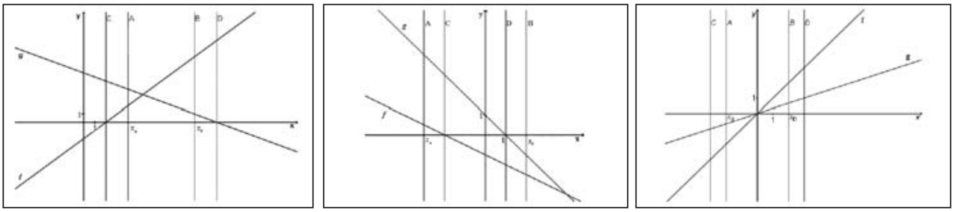
division qui est aussi proposée par les étudiants comme réponse à Q_0, s'étudieront plus tard. L'addition et la soustraction des droites ne sont pas considérées, parce que qu'elles conduisent aux notions connues par les élèves, puisque les fonctions constantes et linéaires ont été déjà étudiées précédemment. Dans cette recherche, l'OM des fonctions polynomiales du deuxième degré, l'OM des fonctions polynomiales et l'OM des fonctions rationnelles se sont retrouvées dans cet ordre, bien qu'il s'agisse de possibilités parmi d'autres dans le parcours proposé. Dans le schéma 2, on peut regarder entre autres, les parcours qui sont générés dans la salle à partir de la question Q_0, et on remarque les sous-questions et les OM qu'on a mentionnées précédemment:

Les techniques qui sont développées pendant le travail de la technique dans les différents parcours donnent lieu aux autres questions dérivées du PER, ce qui montre la générativité de Q_0.

P_1: Fonctions de deuxième degré. Dans la première partie du PER, on est parti de la question: Q_1: *comment effectuer la multiplication de deux droites, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes?* (Llanos & Otero, 2012; Otero, Llanos & Gazzola, 2012). On a proposé la situation suivante:

Les fonctions f et g sont données par les graphiques des Figures. Toutes les droites A//B//C//D, sont perpendiculaires à l'axe x. La fonction $h = f \cdot g$

Figure 1



Graphiques des fonctions f et g

(a) *Quelle serait la graphique plus raisonnable pour h? Quelles caractéristiques du graphique de h pourrais-tu justifier?*

(b) *Pour toutes x_a et x_b équidistantes des zéros de chaque fonction, $\overline{CA} = \overline{BD}$. C'est vrai $h(x_a) = h(x_b)$? Pourrais-tu justifier?*

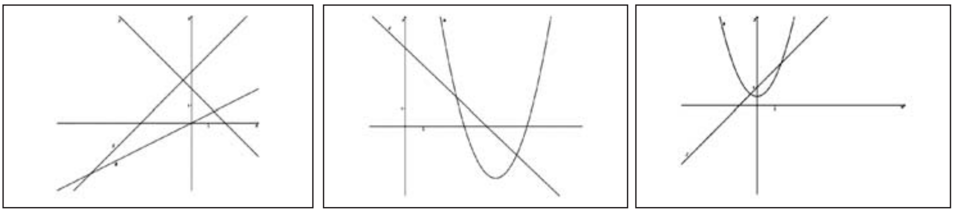
(c) *Quels triangles faudrait-il construire pour calculer la multiplication entre f et g sur l'axe de symétrie, en utilisant l'un des cotés d'un des triangles, l'unité?*

Les situations permettent de construire un graphique raisonnable pour la courbe qui est le produit des droites. Pour faire *h* les étudiantes construisent des points qu'ils appellent "sûrs": des zéros, dans quelques cas, l'un négatif, ou des multiples de l'unité et les signes de *h* (C^+ et C^-). Il est remarquable que le processus de démonstration de la symétrie de la courbe est la construction géométrique du sommet, permettent aux élèves de développer une technique qui est très utile pour augmenter la quantité des *"points sûrs"*. La technique est basée sur la construction des triangles semblables, qu'ils doivent choisir d'une manière appropriée au même temps qu'ils utilisent l'unité. Les élèves utilisent la technologie du Théorème de Thales et la proportionnalité des segments pour expliquer la technique qu'ils ont développée. Ces techniques développées pour répondre au problème de la multiplication des droites dans P_1 peuvent s'étendre dans P_2.

P_2: Fonctions polynomiales. Dans la deuxième partie du PER, l'activité est générée par Q_2: *Comment effectuer la multiplication de plus de deux droites ou de droites et de paraboles ou de paraboles, si l'on connaît seulement sa représentation graphique et l'unité sur les axes?* On peut construire les courbes à partir des droites et des paraboles qu'on se propose de multiplier. Le problème proposé permet dans n'importe quel cas, de reconstruire les caractéristiques des fonctions polynomiales du troisième degré:

Les fonctions f, g et j ou f et h sont données par les graphiques de la Figure. La fonction $p = f \cdot q \cdot j$, ou $p = f \cdot h$

FIGURE 2



Graphiques des courbes f, g, j, y, h respectivement

(a) *Quels sont les ponts sûrs et les signes de p ?*
(b) *Quelle serait le graphique plus raisonnable pour p ? Quelles caractéristiques du graphique de p pourrais-tu justifier ?*

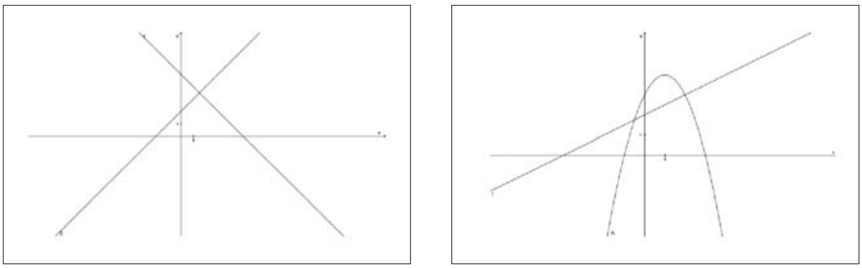
En face de ce problème, les élèves continuent avec l'étude initialement basée sur les points sûrs : les zéros, les uns, les uns négatifs. Au préalable, ils analysent le signe du produit - en employant le zéro - cette action est très utile pour ceux-ci quand ils essaient d'obtenir la courbe de *p*. C'est surprenant d'observer comment les élèves récupèrent de l'année antérieure la technique du calcul géométrique pour obtenir des points de la courbe qui ne sont pas liés aux points remarquables ou aux multiples de l'unité. Donc la deuxième partie du PER, P_2, est basée sur une généralisation de techniques développées dans P_1.

P_3: Fonctions rationnelles. La troisième partie du PER, P_3, commence avec la question liée à la division de courbes Q_3: *Comment effectuer la division entre des fonctions polynomiales, si l'on connaît seulement ses représentations graphiques et l'unité sur les axes?* (Otero, Llanos & Gazzola, 2012)

L'emphase est mis sur l'obtention d'une courbe raisonnable pour q, où $q = \frac{p}{r}$ et p et r sont des polynômes avec $r \neq 0$. Dans les deux cas on cherche à construire un graphique raisonnable pour les fonctions rationnelles q.

FIGURE 3

Les fonctions f, g et h sont donnés par les graphiques de la Figure. La fonction $q = \frac{f}{g}$ ou $q = \frac{f}{h}$ respectivement.



(a) Quelle serait le graphique le plus raisonnable pour q?
(b) Quelles caractéristiques du graphique de q pourrais-tu justifier?
(c) Est-ce-t' elle (q) une fonction?

Représentation graphique des courbes

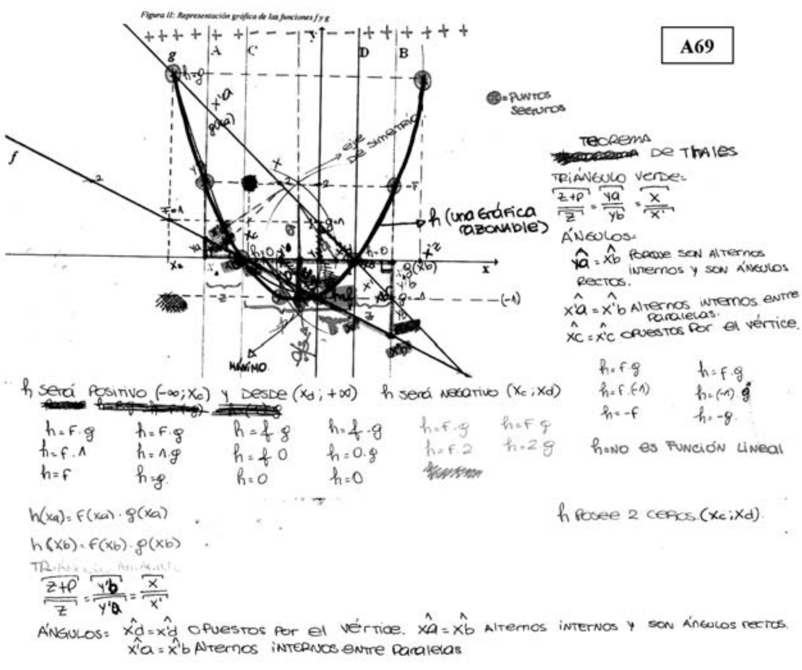
Les étudiants obtiennent la plus raisonnable courbe de q en identifiant dans une première instance les signes et les «*points sûrs*» de q. Pour cela, ils identifient des zéros, ils utilisent l'unité, l'un négatif, et ils utilisent le fait que, dans l'intersection des graphiques, l'ordonnée de q est un, parce qu'il s'agit d'une division des valeurs égales. Pour obtenir d'autres points, ils réadaptent et modifient la technique de la construction géométrique qu'ils ont déjà utilisé dans les parcours antérieurs. Ils construisent des triangles semblables, en déduisent la donnée de l'unité et ils expriment les proportions pour obtenir l'ordonnée du point qui est le quotient cherché, dans n'importe quelle abscisse.

De plus, les élèves ont considéré le cas dans lequel le diviseur est zéro, qui peut correspondre à une asymptote verticale. Ils identifient les points où la fonction diviser prend la valeur zéro, et ils analysent le comportement possible de la graphique plus raisonnable de *q*, dans les points du dénominateur qui sont proches du zéro. Ils rencontrent les possibilités suivantes: le dividende et le diviseur prennent ou non simultanément la valeur zéro, ce qui permettra d'analyser l'existence de *q* et de ses asymptotes, entre d'autres choses. Le graphique qu'ils ont reconstruit sera la représentation graphique des fonctions rationnelles si les valeurs qui annulent le dénominateur sont exclues du domaine de *q*.

Analyse des Quelques Protocoles et des Résultats Obtenues dans le PER Réalisé

Dans les misses en œuvres réalisées, le problème des opérations avec courbes dans les cadres géométriques, cartésiens et fonctionnels, nous a amené à reconstruire les caractéristiques principales des fonctions polynomiales du deuxième degré, des fonctions polynomiales de plus haut degré ainsi que des fonctions rationnelles. Les figures présentées ensuite montrent comment les techniques qui ont été construites dans un PER sont récupérées et modifiées dans l'autre. On a sélectionné les protocoles des étudiants A69 (Figure 4), A56 (Figure 5) et A54 (Figure 6) pour décrire

Figure 4



Résolution de l'élève A69

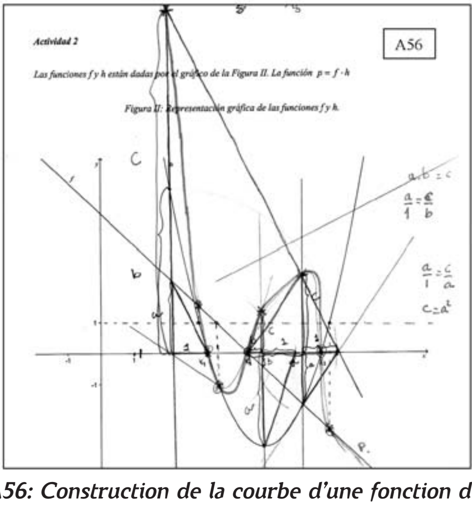
les caractéristiques de la construction de la graphique des fonctions polynomiales du deuxième degré dans P_1, des fonctions polynomiales dans P_2 et des fonctions rationnelles dans P_3, respectivement.

P_1: Les fonctions polynomiales du deuxième degré dans les cadres géométriques, cartésiens et fonctionnels. Les protocoles montrent comme les étudiants se basent initialement sur les points sûrs et aussi, sur l'analyse des signes. En prenant des points à une distance égale du zéro et en utilisent le théorème de Thalès, ils ont justifié l'égalité de l'ordonnée de ces points, c'est-à-dire ils ont démontré la symétrie de la courbe *h*. Ils ont justifié la construction et l'existence du sommet par la construction des triangles semblables et du Théorème de Thalès. Dans la figure 4 on peut voir les justifications placées par l'étudiant A69 pour chaque point de *h* qu'il a construit.

La multiplication des droites nous a amené vers les caractéristiques de la parabole, et à justifier sa symétrie, et ainsi, à la conclusion qu'il existe dans un point minimal ou maximal dans la moitié du segment qui a pour extrêmes les zéros. Depuis le cadre géométrique, on a aussi remarqué des propriétés de racines paires et impaires.

P_2: Les fonctions polynomiales dans les cadres géométriques, cartésiens et fonctionnels. La multiplication de trois droites ou de paraboles avec des droites, ou de paraboles, etc. nous a amené aux caractéristiques des fonctions polynomiales, en réadaptant des techniques traitées dans le PER_1. L'élève A56 a basé ses calculs sur les

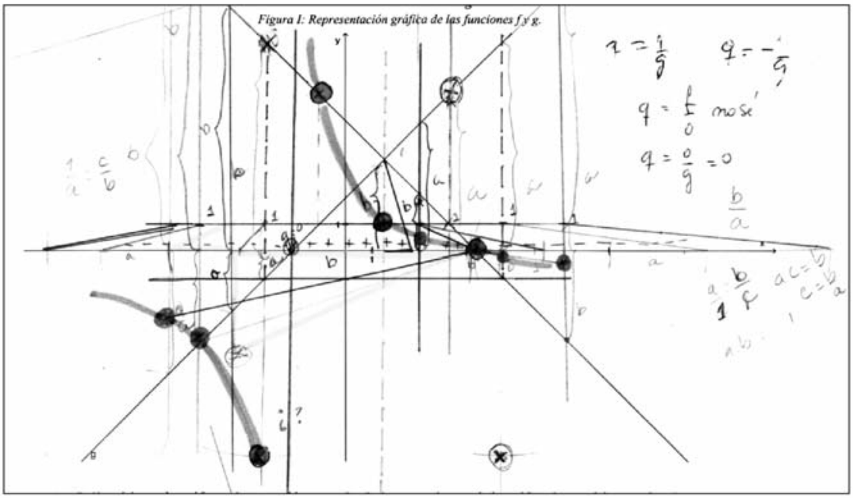
FIGURE 5



Résolution de l'élève A56: Construction de la courbe d'une fonction de troisième degré points sûrs et aussi sur l'analyse des signes. L'adaptation de la technique déjà utilisée pour la construction du sommet de la parabole, et le pouvoir d'agir qu'ils ont obtenu, permet aux étudiants de construire beaucoup d'autres points de la courbe. Les proportions entre segments remarqués dans la figure 5 correspondent à ces constructions.

P_3: Les Fonctions rationnelles dans les cadres géométriques, cartésiens et fonctionnels. La division de fonctions polynomiales nous a amené aux caractéristiques des foncions rationnelles, en utilisent des techniques développées dans les activités précédents P_1 et P_2. Dans le protocole de la Figure 6, on peut observer les opérations réalisées. Les élèves se sont focalisés vers l'identification des points où la fonction *q* n'était pas définie et vers la construction géométrique pour augmenter la quantité des points sûrs, surtout dans les points proches aux asymptotes de *q*. Les étudiants se sont basés sur les points sûrs, l'analyse des signes et sur les résultats propres de P_3: chez l'intersection des courbes le produit prend la valeur un, les zéros du dénominateur et l'asymptote verticale. Ils ont fait une nouvelle adaptation de la technique pour la multiplication des segments, pour obtenir maintenant les points de la division dans n'importe quelle abscisse. On voit dans le protocole les proportions entre segments en correspondance avec les constructions. Le graphique de *q* a été construit avec les "points sûrs", les signes et les constructions des triangles pour faire le calcul sur n'importe quelle abscisse. Les élèves maîtrisent très bien cette technique.

FIGURE 6



Résolution de l'élève A54 : Construction de la courbe d'une fonction rationnelle

Les protocoles illustrent des résolutions de différentes questions dérivées de Q_0 obtenues au long de deux années successives de la scolarité secondaire. Dans chaque activité P_1, P_2 et P_3 nous sommes allés plus loin que la représentation graphique, au moyen du changement de cadres: analytique, graphique et fonctionnelle. L'entrée au cadre analytique est réalisée quand les élèves ont trouvé les expressions algébriques des fonctions et ils ont fait l'opération correspondante, en profitant des médias qui étaient disponibles.

Dans P_1 le changement de cadres a permis d'obtenir des représentations algébriques équivalentes des fonctions polynomiales de deuxième degré. Il est aussi remarquable que les élèves aient commencé par l'expression en facteurs. Les zéros, leurs propriétés, la multiplicité des racines, le maximum ou minimum et les signes des fonctions sont réinterprétés dans ce cadre. Dans la rentrée au cadre géométrique, ils ont aussi analysé les cas des courbes qui n'ont pas de racines réelles -au moyen d'une translation du vecteur $\vec{v}$ d'une certaine graphique-. La méthode est généralisable aux fonctions polynomiales. Bien qu'il s'agisse d'une méthode différente de rencontrer des fonctions de deuxième degré dans l'école, la question Q_0 formulée dans le cadre géométrique porte une grande générativité et elle donne sens, pas seulement aux fonctions polynomiales de deuxième degré, mais à toutes les fonctions algébriques.

Dans P_2 le changement de cadres analytique, graphique et fonctionnelle a permis d'obtenir les représentations analytiques de ces fonctions, comme la multiplication des courbes, et après, on a rencontré l'expression générale des fonctions polynomiales. Il s'agit aussi de développer des techniques algébriques pour étudier des opérations avec polynômes, pas seulement dans le cadre algébrique, mais aussi dans le cadre graphique. Le fait de commencer par la multiplication des courbes et ses constructions géométriques, donne sens au problème de la décomposition en facteurs des polynômes, aux zéros et à l'utilité de l'expression factorisée, laquelle est d'habitude une notion très lourde pour les élèves, quand on commence par l'expression développée. Ces sujets sont repris dans P_3 aussi pour l'obtention de la courbe résultant de la division que pour l'obtention des représentations algébriques des fonctions rationnelles et des opérations et simplifications entre eux.

Le changement de cadres permet rencontrer l'OM des fonctions rationnelles et des caractéristiques de ses représentations analytiques. On reprend l'analyse des zéros des fonctions rationnelles, des asymptotes et des points de discontinuité. Il a été aussi proposé de construire et justifier des techniques pour les opérations avec ces fonctions dans le cadre graphique et analytique. L'analyse des points de discontinuité peut nous amener à l'OM de la limite des fonctions.

Quelques Conclusions Partielles

Notre recherche a développé un PER finalisé, mono disciplinaire et viable. Il conduit à rencontrer des organisations mathématiques locales (OML) pendant la construction des réponses à la question génératrice. Il s'agit d'un PER écologiquement viable dans le contexte actuel de l'école secondaire en Argentine. On peut cependant faire les remarques suivantes.

En rapport à la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde, nous avons réalisé une modification du contrat substantif, en changeant beaucoup les responsabilités des étudiants et de l'enseignant. En particulier, notre médiation a été beaucoup plus concentrée dans le processus d'ingénierie que dans l'activité de la classe. Les élèves prennent ces nouvelles responsabilités lentement et progressivement, ce qui a produit, surtout au commencement, un contrôle important du milieu M, contrairement à qui serait conseillé par la théorie.

D'abord, des difficultés ont été éprouvées au niveau de la topo genèse. Les élèves opposaient des résistances. Dans P_1, ils ont exprimé quelque fois que nous devions leur expliquer. Leur parents ont été aussi surpris et se demandaient: pourquoi ces enseignants *n'expliquent pas?* La TAD a bien montré que le savoir est vu comme transparent par les parents, par les autorités des écoles et aussi par les enseignants. Avec le temps, la résistance initiale est diminuée, à mesure que les étudiants s'accommodent et ils arrivent à changer complètement leur attitude. Pendant les premières mises en acte, il a été très difficile, pour le groupe d'étude, de supporter l'incertitude des étudiants. Ils n'ont pas l'habitude de faire face aux questions inconnues, et à attendre pour trouver une solution. Il faut du temps pour adopter une attitude pro cognitive, mais, nous avons observé quelques progrès après deux ans.

La dilatation du temps de l'horloge, n'a pas été notre principale difficulté, parce que nous avions une infrastructure scolaire, laquelle nous a laissé continuer pendant l'année suivante. Ainsi, les techniques construites à l'avance dans $P_{1,}$ ont été adaptées après dans les autres parties du parcours et le temps a été récupéré. Le PER demande un retour vers la géométrie, qui a été difficile à récupérer, parce qu'elle a de fait disparu dans l'école. Il s'agit d'une situation très négative pour l'enseignement des mathématiques.

Initialement, nous n'avions pas prévu de vraies possibilités pour les étudiants d'effectuer des opérations sur les courbes, ou pour faire des constructions géométriques par lui-même. Le changement de nos attentes a aussi affecté notre attitude comme enseignants: nous avons laissé leur place aux élèves. En même temps, il a été nécessaire de créer de nouveaux dispositifs pour effectuer l'évaluation selon les exigences des autorités scolaires, laquelle ne doit pas être confondue avec l'évaluation du PER. Nous avons essayé de diminuer, pour les étudiants, la pression des examens et des qualifications, mais aussi de lever l'interdiction de se tromper, qui est dominante dans le contrat traditionnel de l'école.

Pour finaliser, bien que nous partagions la nécessité des changements orientés vers la pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde, et sa mise en œuvre dans les PER, nous ne le trouvons pas viable dans l'école secondaire actuelle. À moins qu'on dispose des équipes qui peuvent soutenir le processus d'ingénierie et l'évolution des parcours. Ainsi que d'une institution ouverte et des étudiants disposés aux défis. Cela signifie que nous soulignons le caractère expérimental de notre travail et qu'il faut poursuivre les recherches. Nous sommes optimistes par rapport au développement de cette pédagogie dans l'école, surtout à la lumière des ruptures dans le paradigme dominant et de la nécessité sociale de redéfinir le rôle de l'école secondaire. Cependant, ces conditions ne dépendent pas de notre volonté, et elles ne sont pas sous notre contrôle. En attendant, nous tenterons de faire vivre dans l'école, à chaque fois que ce sera possible, la pédagogie de l'enquête, en étant conscients qu'il est difficile d'aller plus loin que les PER finalisées qui ont été présentés précédemment.

RÉFÉRENCES

Bolea, P., Bosch, M. & Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Consulté le 9 février 2012 de : http://yves.chevallard.free.fr/.

Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées (http://yves.chevallard.free.fr/).

Chevallard, Y. (2011). Quel programme pour l'avenir de la recherche en TAD? In M. Bosch et al. (eds) *Aportes de la Teoría Antropológica de lo Didáctico : Un panorama de la TAD* (Cataluña: Centre de Recerca Matemàtica), 23-32.

Chevallard, Y. (2012). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm (http://yves.chevallard.free.fr/).

Douady, R. (1999). Relation Function/al algebra: an example in high school (age 15-16). In I. Schwank (ed.) *Proceedings of CERME 1, European research in mathematics education*, v. 1, 113-124.

Llanos, V. C. & Otero, M. R. (2012). Las funciones polinómicas de segundo grado en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI): alcances y limitaciones. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNI'ON*, 31, 45-63 (http://www.fisem.org/web/union/).

Otero, M. R. (2010). Communication personnel avec Régine Douady, Paris, 01-02-2010 / 25-02-2010.

Otero, M. R. & Llanos, V. C. (2011). Enseñanza por REI en la Escuela Secundaria: desafíos, incertidumbres y pequeños logros al cabo de seis implementaciones. In M. R. Otero et al. (eds) *Actas del I CIECyM y II ENEM* (Tandil: NIECyT, Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA), 15-23.

Otero, M. R., Llanos, V. C. & Gazzola, M. P. (2013, in press). La pedagogía de la investigación en la escuela secundaria y la implementación de Recorridos de Estudio e Investigación en matemática. *Revista Ciencia Escolar: enseñanza y modelización* (http://www.revistacienciaescolar.cl/).

Ruiz–Munzón, N., Bosch, M. & Gascón, J. (2010). *La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria* (http://www.atd-tad.org/).